МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебно-методического пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва 2010

УДК 514.742.4(07)
ББК 22.151.5я7
И73

Интегральные и дифференциальные операторы и обобщенные функции: Учебно-методическое пособие / Н.В. Мирошин, А.С. Логинов, Ю.Н. Гордеев, В.М. Простокишин. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 168 с.

Дан материал по базовым разделам теории дифференциальных и интегральных операторов, теории интеграла Лебега, обобщенным функциям, фундаментальным решениям линейных дифференциальных и интегральных уравнений. Значительное место в пособии уделяется вопросам использования преобразования Фурье в решении различных задач математической физики. В качестве приложения изучаемого аппарата, в частности, рассматривается обобщенная задача Дирихле для уравнений эллиптического типа, а также задача Коши для уравнения теплопроводности.

Предназначено для студентов 4-6 семестров НИЯУ МИФИ факультетов «Т» и «Ф» и Высшего физического колледжа.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент проф. О.С. Сороковикова

ISBN 978-5-7262-1317-0

I. ВВЕДЕНИЕ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Метод последовательных приближений

В этом параграфе докажем *теорему существования и единственности* (ТСЕ) решения задачи Коши для системы

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \tag{1.1}$$

$$\vec{y} = \{y_1(t),\dots,y_n(t)\}, \;\; \vec{f}(t,\vec{y}) = \{f_1(t,\vec{y}),\dots,f_n(t,\vec{y})\}$$

методом *последовательных приближений.* Для системы (1.1) на правую часть $\vec{f}(t,\vec{y})$ помимо непрерывности приходится налагать дополнительные условия.

Положим: $|\vec{y}(x)| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k(t)|^2\right)^{1/2}$, и обозначим $\bar{U}_\delta(N_0)$ – замыкание шара $U_\delta(N_0) = U_\delta(t_0,\vec{y}_0)$..

<u>Теорема 1.1 (ТСЕ).</u> Пусть вектор-функция $\vec{f}(t,\vec{y})$ определена в области $G \subseteq E^{n+1}_{x,\vec{y}}$, $N_0(t_0,\vec{y}_0) \in G$ (внутренняя точка). Пусть, кроме того, $\exists \delta > 0$: в $\overline{U_\delta(t_0,\vec{y}_0)}$ выполнены условия:

1) $\vec{f}(t,\vec{y})$ *непрерывна* по $(t,\vec{y})$;
2) $\vec{f}(t,\vec{y})$ удовлетворяет в $\overline{U_\delta(t_0,\vec{y}_0)}$ по $\vec{y}$ *условию Липшица*:

$$\exists K > 0: \; \forall\left((t,\vec{y}_1),\; (t,\vec{y}_2) \in \overline{U_\delta(t_0,\vec{y}_0)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{f}(x,\vec{y}_2) - \vec{f}(x,\vec{y}_1)\right| \le K|\vec{y}_2 - \vec{y}_1|.$$

Тогда $\exists h > 0,$ такое, что на отрезке $[t_0 - h,\; t_0 + h]$ *существует* и *притом единственное решение* задачи (1.1).

<u>*Доказательство.*</u> Докажем сначала *существование* решения задачи (1.1). Если такое решение существует на $[x_0 - h,\; x_0 + h]$, $h > 0$, то, интегрируя (1.1), получим, что это решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$\vec{y}(t)=\vec{y}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}\left(t,\vec{y}(s)\right)ds\ . \tag{1.2}$$

Обратно, если $\vec{y}(t)$ – непрерывное на $[t_0-h,\ t_0+h]$ решение интегрального уравнения (1.2), то (в силу теоремы о дифференцировании интеграла по верхнему пределу) оно удовлетворяет задаче (1.1). Таким образом, нахождение решения задачи (1.1) эквивалентно нахождению непрерывного решения уравнения (1.2).

Теперь рассмотрим уравнение (1.2). Пусть

$$M=\sup\left(\left|\vec{f}(t,\vec{y})\right|,\ (t,\vec{y})\in\overline{U_\delta\left(t_0,\vec{y}_0\right)}\right).$$

Тогда $\{(t,\vec{y}):\ |\vec{y}-\vec{y}_0|\le M|t-t_0|\}$ – конус с вершиной в точке $N_0\left(t_0,\vec{y}_0\right)$. Обозначим абсциссы точек пересечения поверхности конуса с поверхностью шара $U_\delta\left(N_0\right)$: $\left(t_0\pm h\right),\ h>0$. На отрезке $[t_0-h,\ t_0+h]$ ищем решение уравнения (1.2) *методом последовательных приближений*, полагая

$$\vec{y}_0(t)=\vec{y}_0,$$

$$\vec{y}_1(t)=\vec{y}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}\left(s,\vec{y}_0(s)\right)ds,$$

$$\cdots,$$

$$\vec{y}_n(t)=\vec{y}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}\left(s,\vec{y}_{n-1}(s)\right)ds,$$

$$\cdots,$$

Так как $\left|\vec{f}(t,\vec{y})\right|\le M$ в $U_\delta\left(t_0,\vec{y}_0\right)$, то

$$\left|\vec{y}_n(t)-\vec{y}_0(t)\right|\le\left|\int_{s_0}^{s}\left|\vec{f}\left(s,\vec{y}_{n-1}(s)\right)\right|ds\right|\le M\left|t-t_0\right|,$$

все приближения определены и непрерывны на $[t_0-h,\ t_0+h]$, а их графики на $[t_0-h,\ t_0+h]$ лежат внутри конуса $|\vec{y}-\vec{y}_0|\le M|t-t_0|$.

Далее имеем следующие оценки:

$$\left|\vec{y}_1(t)-\vec{y}_0(t)\right|\le n\cdot M\left|t-t_0\right|,$$

$$\left|\vec{y}_2(t)-\vec{y}_1(t)\right| \le \left|\int\limits_{t_0}^{t}\left[\vec{f}\left(s,\vec{y}_1(s)\right)-\vec{f}\left(s,\vec{y}_0(s)\right)ds\right]\right| \le$$

$$\le n\left|\int\limits_{t_0}^{t}\left|\vec{f}\left(s,\vec{y}_1(s)\right)-\vec{f}\left(s,\vec{y}_0(s)\right)\right|ds\right| \le \text{(условие Липшица)}$$

$$\le nK\left|\int\limits_{t_0}^{t}\left|\vec{y}_1(s)-\vec{y}_0(s)\right|ds\right| \le KMn^2\left|\int\limits_{t_0}^{t}\left|s-t_0\right|ds\right| \le KMn^2\frac{\left|t-t_0\right|^2}{2!};$$

$$\left|\vec{y}_3(t)-\vec{y}_2(t)\right| \le \left|\int\limits_{t_0}^{t}\left[\vec{f}\left(s,\vec{y}_2(s)\right)-\vec{f}\left(s,\vec{y}_1(s)\right)\right]ds\right| \le$$

$$\le n\left|\int\limits_{t_0}^{t}\left|\vec{f}\left(s,\vec{y}_2(s)\right)-\vec{f}\left(s,\vec{y}_1(s)\right)\right|ds\right| \le \text{(условие Липшица)}$$

$$\le nK\left|\int\limits_{t_0}^{t}\left|\vec{y}_2(s)-\vec{y}_1(s)\right|ds\right| \le MK^2n^3\left|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\left|s-t_0\right|^2}{2!}ds\right| \le MK^2n^3\frac{\left|t-t_0\right|^3}{3!}$$

и т.д. По индукции получаем:

$$\left|\vec{y}_{m+1}(t)-\vec{y}_m(t)\right| \le Mn\frac{(nK)^m}{(m+1)!}\left|t-t_0\right|^{m+1}. \qquad (1.3)$$

Теперь рассмотрим на $[t_0-h,\ t_0+h]$ ряд

$$\vec{y}(t)=\vec{y}_0(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\vec{y}_m(t)-\vec{y}_{m-1}(t)\right).$$

Все члены этого ряда – непрерывные на $[t_0-h,\ t_0+h]$ функции, а в силу оценок (1.3) сам ряд сходится на $[t_0-h,\ t_0+h]$ *равномерно*. Следовательно:

а) его сумма $\vec{y}(t)$ – *непрерывная* на $[t_0-h,\ t_0+h]$ функция; $\vec{y}(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\vec{y}_n(t)$;

б) в равенстве $\vec{y}_n(t)=\vec{y}_0(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\vec{f}\left(s,\vec{y}_{n-1}(s)\right)ds$ можно перейти к пределу под знаком интеграла. Отсюда получаем, что $\vec{y}(t)$ – *непрерывное решение* уравнения (1.2), а, таким образом, и задачи (1.1).

Установим *единственность* полученного решения. Для этого вначале докажем одно утверждение, которое будет нам полезно и в дальнейшем.

Лемма 1.1 (Гронуолла–Беллмана). Пусть $A\ge 0$ – константа, а функции $Z(x)$ и $B(x)$ – *непрерывные*, *неотрицательные* на $[x_0-h,\ x_0+h]$, удовлетворяющие неравенству

$$Z(x)\le A+\left|\int\limits_{x_0}^{x}B(t)Z(t)\,dt\right|.$$

Тогда $\forall x\in[x_0-h,\ x_0+h]\Rightarrow Z(x)\le A\exp\left(\left|\int\limits_{x_0}^{x}B(t)\,dt\right|\right)$.

Доказательство. Пусть для определенности $x\ge x_0$. Тогда

$$Z(x)\le A+\int\limits_{x_0}^{x}B(t)Z(t)\,dt\,.$$

При $A=\mathrm{const}>0$ получаем для $x_0\le s\le x$:

$$\frac{Z(s)\cdot B(s)}{A+\int\limits_{x_0}^{s}B(t)Z(t)\,dt}\le B(s)\Rightarrow \ln\left(A+\int\limits_{x_0}^{s}B(t)Z(t)\,dt\right)\Bigg|_{x_0}^{x}\le\int\limits_{x_0}^{x}B(t)\,dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\left(\int\limits_{x_0}^{x}B(t)Z(t)\,dt+A\right)\le\ln A+\int\limits_{x_0}^{x}B(t)\,dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+\int\limits_{x_0}^{x}B(t)Z(t)\,dt\le A\exp\int\limits_{x_0}^{x}B(t)\,dt\,.$$

Но тогда $Z(x) \le A + \int\limits_{x_0}^{x} B(t)Z(t)\,dt \le A\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} B(t)\,dt\right)$.

Так как здесь A – любое положительное, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $A \to 0+$, убеждаемся, что лемма остается справедливой, если постоянная $A = 0$. Наконец, если $x < x_0$, то $Z(x) \le A + \int\limits_{x}^{x_0} B(t)Z(t)\,dt$, и повторяем те же выкладки.

Используя лемму Гронуолла−Беллмана, докажем единственность решения задачи (1.1). Действительно, если $\vec{y}_1(t)$ и $\vec{y}_2(t)$ – два решения задачи (1.1), то их разность $\vec{y}(t) = \vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[\vec{f}(s)\,\vec{y}_2(s) - \vec{f}(s, \vec{y}_1(s))\right] ds .$$

Отсюда, используя условие Липшица, получаем:

$$|\vec{y}(t)| \le n\left|\int\limits_{t_0}^{t} \left|\vec{f}(s, \vec{y}_2(s)) - \vec{f}(s, \vec{y}_1(s))\right| ds\right| \le$$

$$\le nK\left|\int\limits_{t_0}^{t} |\vec{y}_2(s) - \vec{y}_1(s)|\,ds\right| = nK\left|\int\limits_{t_0}^{t} |\vec{y}(s)|\,ds\right|.$$

Теперь, применив лемму Гронуолла−Беллмана в случае $A = 0$, $B(t) = nK = \text{const}$, $Z(t) = |\vec{y}(t)|$, получаем, что $|\vec{y}(t)| \equiv 0$. Теорема доказана.

§ 2. Непрерывная зависимость решений задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений от правой части, начальных данных и параметров

В этом параграфе ограничимся рассмотрением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ):

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.1}$$

<u>Теорема 2.1.</u> Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в области $G \subseteq E^2_{t,y}$ и удовлетворяет в G условию Липшица по y. Пусть далее $N_0(t_0, y_0) \in G$ и $y = y(t)$ − определенное на некотором отрезке $[t_0 - h,\ t_0 + h]$ решение задачи (2.1). Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \left(\begin{array}{l} \forall \tilde{N}_0(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0): \quad \rho(N_0, \tilde{N}_0) < \delta; \\ \forall \tilde{f} \in C(G), \text{ удовлетворяет в } G \text{ условию} \\ \text{Липшица и такая, что: } \sup\limits_{t,y \in G} \left| f(t, y) - \tilde{f}(t, y) \right| < \delta \end{array} \right)$$

и, тогда:

1) на $[t_0 - h/2,\ t_0 + h/2]$ существует и притом единственное решение задачи:

$$y' = \tilde{f}(t, y), \quad y(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0, \tag{2.2}$$

обозначаемое далее $\tilde{y}(t)$;

2) $\sup\limits_{x \in [t_0 - h/2,\ t_0 + h/2]} \left| y(t) - \tilde{y}(t) \right| < \varepsilon.$

<u>Доказательство.</u> Без ограничения общности можно считать, что f и $\tilde{f}$ ограничены в G (иначе рассматриваем $G_1: \ \overline{G}_1 \subseteq G$). Пусть:

$$M = \sup_{(t,y) \in G} \left| f(t, y) \right|, \quad \tilde{M} = \sup_{(t,y) \in G} \left| \tilde{f}(t, y) \right|;$$

$$\Pi = \left\{ (t, y) \in G : \left| t - t_0 \right| \le h, \ \left| y - y_0 \right| \le Mh \right\},$$

$$\tilde{\Pi} = \left\{ (t, y) \in G : \ \left| t - \tilde{x}_0 \right| \le \tilde{h}, \ \left| y - \tilde{y}_0 \right| \le \tilde{M}\tilde{h} \right\},$$

т.е. $\tilde{h},\ h>0,$ такие, что прямоугольники $\tilde{\Pi}$ и Π целиком лежат в G. Тогда на $[t_0-h,\ t_0+h]$ определено решение задачи (2.1), а на $\left[\tilde{t}_0-\tilde{h},\ \tilde{t}_0+\tilde{h}\right]$ – единственное решение $\tilde{y}(t)$ задачи (2.2). Очевидно, что $\exists\delta_0>0:\ \forall 0<\delta<\delta_0 \Rightarrow [t_0-h/2,\ t_0+h/2]\subset\left[\tilde{t}_0-\tilde{h},\ \tilde{t}_0+\tilde{h}\right]$, если только:

$$\begin{cases}\rho\left(N_0,\tilde{N}_0\right)=\left((t_0-\tilde{t}_0)^2+(y_0-\tilde{y}_0)^2\right)^{1/2}<\delta;\\ \sup\limits_{(x,y)\in G}\left|f(t,y)-\tilde{f}(t,y)\right|<\delta,\end{cases}$$

так как при этом расстояние между центрами прямоугольников $\tilde{\Pi}$ и Π меньше δ, а также

$$\left|M-\tilde{M}\right|=\left|\sup_{(t,y)\in G}|f(t,y)|-\sup_{(t,y)\in G}\left|\tilde{f}(t,y)\right|\right|\le\sup_{(t,y)\in G}\left|f(t,y)-\tilde{f}(t,y)\right|<\delta.$$

Но тогда на отрезке $[t_0-h/2,\ t_0+h/2]$ определены и единственны решение $y(t)$ задачи (2.1) и решение $\tilde{y}(t)$ задачи (2.2). Оценим их разность на этом отрезке. Имеем:

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds;\quad \tilde{y}(t)=\tilde{y}_0+\int_{\tilde{t}_0}^{t}\tilde{f}(s,\tilde{y}(s))ds,$$

откуда:

$$|y(t)-\tilde{y}(t)|\le|y_0-\tilde{y}_0|+\left|\int_{t_0}^{t}\tilde{f}(t,\tilde{y}(s))ds-\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds\right|\le$$

$$\le\delta+\left|\int_{\tilde{t}_0}^{t}\tilde{f}(s,\tilde{y}(s))ds+\int_{t_0}^{t}\left[f\left(s,\tilde{y}(s)\right)-\tilde{f}(s,y(s))\right]dsds\right|+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[\tilde{f}(s,y(s))-f(s,y(s))\right]ds\le\delta+\delta\cdot\tilde{M}+\delta\cdot\frac{h}{2}+\tilde{K}\left|\int_{t_0}^{t}|\tilde{y}(s)-y(s)|ds\right|,$$

где $\tilde{K}$ – константа в неравенстве Липшица для функции $\tilde{f}$.

Получили промежуточную оценку разности:

$$\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right| \le \delta\left(1+\frac{1}{2}h+\tilde{M}\right)+\tilde{K}\left|\int_{t_0}^{t}\left|\tilde{y}(s)-y(s)\right|ds\right|,$$

Откуда по лемме Гронуолла−Беллмана получаем:

$$\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right| \le \delta\left(1+\frac{1}{2}h+\tilde{M}\right)\mathrm{e}^{\tilde{K}\left|t-t_0\right|} \le \delta\left(1+\frac{1}{2}h+M\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\tilde{K}h}.$$

Из этой оценки, очевидно, следует второе утверждение теоремы.

Пусть теперь правая часть уравнения зависит от параметра $\overline{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$. Рассматриваем следующую задачу:

$$y'=f(t,\ y;\ \overline{\mu}) \qquad y(t_0)=y_0\,. \tag{2.3}$$

<u>Теорема 2.2.</u> Пусть $\tilde{G}=\overline{G}\times\mathfrak{M}$, где $G\subset E_{ty}^2$ − некоторая ограниченная область, а $\mathfrak{M}=\{\overline{\mu}:\ a_k\le\mu_k\le b_k,\ k=1,2,\ldots,n\}$; $\overline{G}$ – замыкание G. Пусть далее $f(t,\ y;\overline{\mu})$ определена и непрерывна по совокупности переменных на $\tilde{G}$, а по y удовлетворяет условию Липшица:

$\exists L>0:\ \forall\left((t,y_1,\overline{\mu}),(t,y_2,\overline{\mu})\in\tilde{G}\right)\Rightarrow\left|f(t,y_2,\overline{\mu})-f(t,y_1,\overline{\mu})\right|\le L\left|y_2-y_1\right|.$

Тогда*:*

1) $\forall(t_0,y_0)\in G\Rightarrow\exists h>0:\ \forall\overline{\mu}\in\mathfrak{M}\ \Rightarrow$ на $[t_0-h,\ t_0+h]$ существует и притом единственное решение $y=y(t,\overline{\mu})$ задачи (2.3);

2) это решение непрерывно зависит от $\overline{\mu}$;

3) если, кроме того, $f(t,\ y;\ \overline{\mu})$ имеет в $\tilde{G}$ непрерывные частные производные по переменным $(y;\ \overline{\mu})$ до порядка $p\ge1$, то и решение $y(t;\ \overline{\mu})$ имеет на $(t_0-h,\ t_0+h)\times\mathfrak{M}$ непрерывные частные производные до порядка $p\ge1$ по $\overline{\mu}$.

<u>Доказательство.</u> 1. Так как $M=\sup\limits_{(t,y,\overline{\mu})\in\tilde{G}}\left|f(t,y,\overline{\mu})\right|<+\infty$, а константа Липшица L не зависит от $\overline{\mu}$, то, строя решение задачи (2.3) методом последовательных приближений, получаем, что $\exists h>0:\ \{(t,y):\ |t-t_0|\le h,\ \ |y-y_0|\le Mh\}\subset G$ и решение $y(t;\ \overline{\mu})$ задачи (2.3) определено на этом отрезке $[t_0-h,\ t_0+h]$ при любом $\overline{\mu}$.

2. Так как $f(t,\ y;\ \overline{\mu})$ *равномерно непрерывна* на $\tilde{G}$, то

$$\forall\delta>0 \Rightarrow \exists\gamma(\delta)>0:\ \forall\left((t,y,\overline{\mu}),\left(t,y,\tilde{\overline{\mu}}\right)\in\tilde{G}:\ \left|\overline{\mu}-\tilde{\overline{\mu}}\right|<\gamma\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{(t,y)\in\overline{G}}\left|f(t,y,\overline{\mu})-f\left(t,y,\tilde{\overline{\mu}}\right)\right|<\delta .$$

Тогда второе утверждение этой теоремы следует из теоремы 2.1, если $\tilde{f}(t,y)=f\left(t,y;\tilde{\overline{\mu}}\right)$.

3. Пусть выполнено дополнительное условие. Фиксируем $\overline{\mu}$ и $\overline{\mu+\Delta\mu}\in\mathfrak{M}$. Обозначим решение задачи (2.3) при фиксированном $\overline{\mu}$ $y(t,\overline{\mu})$, а решение задачи: $y'=f\left(t,y;\overline{\mu+\Delta\mu}\right)$, $y(t_0)=y_0$ через $y\left(t,\overline{\mu+\Delta\mu}\right)$. Сначала рассмотрим $\overline{\Delta\mu}=\{\Delta\mu_1,0,\ldots,0\}$, обозначив $\overline{\mu}=\{\mu_1,\overline{\mu}'\}$. Тогда:

$$\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})=y(t,\mu_1+\Delta\mu_1,\overline{\mu}')-y(t,\overline{\mu});$$

$$\left(\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})\right)'_t=f\left(t,y(t;\mu_1+\Delta\mu_1,\overline{\mu}');\ \mu_1+\Delta\mu_1,\overline{\mu}'\right)-f\left(t,y(t,\overline{\mu}),\overline{\mu}\right)=$$

$$=\int_0^1 f'_\xi\left(t,\underbrace{y(t,\overline{\mu})+\xi\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})};\ \underbrace{\overline{\mu}+\xi\overline{\Delta\mu}}\right)d\xi=$$

$$=\underbrace{\int_0^1 f'_y\left(t;y(t;\overline{\mu})(t,\overline{\mu})+\xi\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu});\ \overline{\mu}+\xi\overline{\Delta\mu}\right)d\xi}_{F}\cdot\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})+$$

$$+\underbrace{\int_0^1 f'_{\mu_1}\left(t;y(t;\overline{\mu})+\xi\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu});\ \overline{\mu}+\xi\overline{\Delta\mu}\right)d\xi}_{\Phi}\cdot\Delta\mu_1=$$

$$=F(t,\overline{\mu};\Delta\mu_1)\,\Delta_{\mu_1}y(t,\overline{\mu})+\Phi(t,\overline{\mu},\Delta\mu_1)\cdot\Delta\mu_1,$$

где Φ и F – непрерывные по $(t,\Delta\mu_1)$ функции ($\overline{\mu}$ фиксировано). Получаем задачу:

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\Delta_{\mu_1} y(t,\overline{\mu})}{\Delta\mu_1}\right)'_t = F(t,\overline{\mu},\Delta\mu_1)\dfrac{\Delta_{\mu_1} y(t,\overline{\mu})}{\Delta\mu_1} + \Phi(t,\overline{\mu},\Delta\mu_1); \\
\left.\dfrac{\Delta_{\mu_1} y(t,\overline{\mu})}{\Delta\mu_1}\right|_{t=t_0} = 0.
\end{cases} \tag{2.4}
$$

Параметр $\Delta\mu_1$ меняется в окрестности точки $\Delta\mu_1 = 0$. По доказанному в п. 2 решение задачи (2.4) непрерывно зависит от $\Delta\mu_1$.

Переходя тогда в (2.4) к пределу при $\Delta\mu_1 \to 0$, получаем следующую задачу (уравнение в вариациях)

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial y}{\partial\mu_1}\right)'_t = \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y,\overline{\mu})\dfrac{\partial y}{\partial\mu_1} + \dfrac{\partial f}{\partial\mu_1}(t,y,\overline{\mu}); \\
\left.\dfrac{\partial y}{\partial\mu_1}\right|_{t=t_0} = 0.
\end{cases} \tag{2.5}
$$

Аналогично устанавливаем существование производных $y'_{\mu_k}(t,\mu)$, $k = 2,\ldots,n$. Если $p > 1$, то далее применяем доказанное утверждение к задаче (2.5).

Следствия. 1. Уравнения (2.5) получаются из (2.3) формальным дифференцированием по μ_1. Аналогично *в более общем случае*:

$$
\begin{cases}
y' = f(t,y,\overline{\mu}) \\
y(t_0) = y_0(\overline{\mu})
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial y}{\partial\mu_k}\right)'_t = f'_y(t,y,\mu)\dfrac{\partial y}{\partial\mu_k} + f'_{\mu_k}(t,y,\overline{\mu}); \\
\left(\dfrac{\partial y}{\partial\mu_k}\right)(t_0) = \dfrac{\partial y_0}{\partial\mu_k}(\overline{\mu}).
\end{cases}
$$

2. Рассмотрим задачу (2.1): $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$.

Положим: $x = t - t_0$, $Z(x) = y(t_0 + x) - y_0$. Тогда $Z(x)$ решение задачи: $Z'(x) = f(x + t_0,\ Z + y_0), Z(0) = 0.$ Следовательно:

$$
\left(\frac{\partial Z}{\partial y_0}\right)'_t = f'_y(x + t_0;\ Z + y_0)\left(1 + \frac{\partial Z}{\partial y_0}\right), \qquad \frac{\partial Z}{\partial y_0}(0) = 0.
$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем *формулы дифференцирования решения по начальным данным*:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)'_t = f'_y(t,y)\frac{\partial y}{\partial y_0}; \quad \frac{\partial y}{\partial y_0}(t_0)=1, \tag{2.6}$$

которые также получаются из (2.1) формальным дифференцированием по y_0.

Пример 2.1. Дана задача Коши $y' = y + \mu\left(x + y^2\right)$, $y(0)=1$. Требуется найти $(\partial y / \partial\mu)\big|_{\mu=0}$.

Решение. Уравнение в вариациях:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)'_x = (1+2\mu y)\frac{\partial y}{\partial \mu} + x + y^2; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)(0)=0.$$

При $\mu = 0 \Rightarrow$ $y' = y$, $y(0)=1 \Rightarrow$ $y(x,0)=\mathrm{e}^x$. Теперь полагаем $\frac{\partial y}{\partial \mu}(x,\mu)\big|_{\mu=0} = \varphi(x)$. Тогда $\varphi(x)$ удовлетворяет задаче:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi + x + y^2(x,0) = \varphi(x) + x + \mathrm{e}^{2x}; \quad \varphi(0)=0.$$

Отсюда $\varphi(x)$=$\mathrm{e}^{2x} - 1 - 1$.

Ответ: $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \mathrm{e}^{2x} - x - 1$.

§ 3. Элементы теории устойчивости решений ОДУ и системы ОДУ

3.1. Основные определения

Рассмотрим систему ОДУ

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}); \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\vec{y} = \{y_1(t),\dots,y_n(t)\}$, $\vec{f}(t,\vec{y}) = \{f_1(t,\vec{y}),\dots,f_n(t,\vec{y})\}$.

Определение 3.1. Пусть $\vec{f}(t,\vec{y})$ и $\left(t_0,\vec{y}_0^*\right)$ таковы, что на $[t_0,+\infty)$ определено и единственно решение $\vec{y}^*(t)$ задачи

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0^*.$$

Это решение $\vec{y}^*(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову при* $t \to +\infty$, если:

1) $\exists \delta_0 > 0$: $\forall \left((t_0,\vec{y}_0) : \left|\vec{y}_0 - \vec{y}_0^*\right| < \delta_0 \right) \Rightarrow$ на $[t_0,+\infty)$ существует и притом единственное решение задачи (3.1);

2) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \left(\exists \delta(\varepsilon) : 0 < \delta(\varepsilon) \le \delta_0\right)$: $\forall \left(\vec{y}(t)\right.$ – решение задачи (3.1) с $\vec{y}_0$: $\left.\left|\vec{y}_0 - \vec{y}_0^*\right| < \delta\right) \Rightarrow \sup\limits_{t \ge t_0} \left|\vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)\right| < \varepsilon$.

Определение 3.2. Это решение $\vec{y}^*(t)$ называется *асимптотически устойчивым при* $t \to +\infty$, если:

1) оно устойчиво по Ляпунову;

2) любое решение $\vec{y}(t)$, удовлетворяющее условиям п. 2 определения 3.1, удовлетворяет также условию $\exists \lim\limits_{t \to +\infty} \left|\vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)\right| = 0$.

Замечание 3.1. Задача Коши для ОДУ

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right); \\ y(t_0) = y_0^0, \ y'(t_0) = y_0^1, \ldots, \ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{3.1$'$}$$

может быть сведена к системе ОДУ вида (3.1), однако удобнее дать непосредственно определение устойчивости решения для (3.1′).

Определение 3.1′. Пусть $f(t;\, z_1, \ldots, z_n)$ и $\left\{\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1, \ldots, \tilde{y}_0^{n-1}\right\}$ таковы, что на $[t_0,+\infty)$ существует и притом единственное решение $\tilde{y}(t)$ задачи

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right); \\ y(t_0) = \tilde{y}_0^0, \ y'(t_0) = \tilde{y}_0^1, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(t_0) = \tilde{y}_0^{n-1}. \end{cases}$$

Это решение $\tilde{y}(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову при* $t \to +\infty$, если:

1) $\exists\delta_0>0: \ \forall\ \left(\left(y_0^0,\ y_0^1,\ \ldots,\ y_0^{n-1}\right)\ :\ \left\{\left(y_0^0-\tilde{y}_0^0\right)^2+\ \ldots\ +\left(y_0^{n-1}-\right.\right.\right.$ $\left.\left.\left.-\tilde{y}_0^{n-1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\delta_0\right)\Rightarrow$ на $[t_0,+\infty)$ определено и притом единственное решение задачи (3.1′);

2) $\forall\varepsilon>0\Rightarrow\exists\delta(\varepsilon):(0<\delta(\varepsilon)\le\delta_0):\ \forall\ y(t)$ – решение (3.1′) с $\vec{y}_0$:

$$\left\{\left(y_0^0-\tilde{y}_0^0\right)^2+\ldots+\left(y_0^{n-1}-\tilde{y}_0^{n-1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\delta\ )\Rightarrow\sup_{t\ge t_0}\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right|<\varepsilon\,.$$

<u>Определение 3.2′.</u> Это решение $y^*(t)$ *называется асимптотически устойчивым при* $t\to+\infty$, если:

1) оно устойчиво по Ляпунову;

2) любое решение $y(t)$ удовлетворяет условиям п. 2 определения 3.1′ и также условию $\exists\lim\limits_{t\to+\infty}\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right|=0$.

Далее для определенности будем формулировать и доказывать теоремы для системы ОДУ.

<u>Замечание 3.2</u>. Заменой функции $\vec{x}(t)=\vec{y}(t)-\vec{y}^*(t)$ сводим исследование устойчивости решения $\vec{y}^*(t)$ системы (3.1) к исследованию устойчивости *нулевого решения* системы:

$$\begin{cases}\vec{x}\,'(t)=\vec{f}\left(t,\vec{x}+\vec{y}^*\right)-\vec{f}\left(t,\vec{y}^*\right)=\varphi(t,\vec{x});\\ \vec{x}(t_0)=\vec{0}.\end{cases}$$

Далее считаем, что *такая замена сделана* и *исследуем на устойчивость нулевое решение* (≡ *точку покоя*) полученной системы.

<u>*Упражнение.*</u> Записать отрицание определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости.

3.2. Устойчивость решений линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами

Теорема 3.1. Рассмотрим систему ОДУ с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t), \tag{3.2}$$

$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – постоянная матрица; $\vec{X}(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ – вектор-столбец неизвестных функций. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

В этом случае:

1) нулевое решение системы *устойчиво по Ляпунову* тогда и только тогда, когда выполняются:

а) $\forall m = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \mathrm{Re}\lambda_m \le 0$;

б) $\forall \lambda_m: \ \mathrm{Re}\lambda_m = 0 \Rightarrow$ число *линейно независимых* собственных векторов, отвечающих λ_m, равно кратности λ_m;

2) нулевое решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\forall m = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \ \mathrm{Re}\lambda_m < 0$.

Доказательство. 1. Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{n}$ – фундаментальная система решений (ФСР) системы (3.2), построенная по собственным значениям матрицы *A*. Тогда очевидно, что при выполнении условий п. 1 получаем

$$\exists M > 0: \ \max_{1 \le k \le n} \left\{ \sup_{t \in [t_0; +\infty)} \left| \vec{\varphi}_k(t) \right| \right\} \le M < +\infty .$$

Далее рассмотрим ФСР $\{\vec{\psi}_k(t)\}_{k=1}^{n}$, такую, что $\vec{\Psi}_k(t)$ удовлетворяют условиям Коши: $\vec{\Psi}_k(t) = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$. Получаем:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \ \vec{\psi}_i(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, \vec{\varphi}_k(t) \Rightarrow \left| \vec{\psi}_i(t) \right| \le \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| \left| \vec{\varphi}_k(t) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \vec{\psi}_i(t) \right| \le \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| \left| \vec{\varphi}_k(t) \right| \Rightarrow \ \exists N > 0: \ \max_{1 \le k \le n} \left\{ \sup_{t \ge t_0} \left| \vec{\psi}_k(t) \right| \right\} \le N .$$

Пусть теперь $\vec{x}(t)$ – решение системы (3.2), такое, что $\vec{x}(t_0) = \{x_{10}, \ldots, x_{n0}\} = \vec{x}_0$. Тогда

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_{k0} \, \vec{\psi}_k(t) .$$

Если теперь $|\vec{x}_0| < \delta$, то

$$\left|\vec{x}(t) - \vec{0}\right| \le \sum_{k=1}^{n} |x_{k0}| \left|\vec{\Psi}_k(t)\right| \le N \sum_{k=1}^{n} |x_{k0}| \le N \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x_{k0}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} = N\sqrt{n}\,\delta.$$

Очевидно, что для системы $\dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t)$ решение определено на всей оси при любых начальных данных в любой точке t_0. Из полученной оценки следует, что нулевое решение устойчиво по Ляпунову $\left(\delta(\varepsilon) = \varepsilon N^{-1} n^{-1/2}\right)$. Действительно, если условие п.1 не выполнено, то в ФСР $\{\vec{\varphi}_k(t)\}_{k=1}^{n}$ хотя бы одна из величин $\left|\vec{\varphi}_k(t)\right|$ не ограничена при $t \to +\infty$. Пусть это, например, $\left|\vec{\varphi}_1(t)\right|$. Тогда $\forall C > 0 \Rightarrow \left|C\vec{\varphi}_1(t)\right|$ также не ограничен при $t \to +\infty$. С другой стороны, при $t = t_0$ величину $\left|c\vec{\varphi}_1(t_0)\right|$ можно сделать сколь угодно малой. Таким образом, нулевое решение не устойчиво при $t \to +\infty$.

2. В случае выполнения условий п.2 справедливы все выкладки п.1, т.е. решение $\vec{x}(t) \equiv \vec{0}$ устойчиво по Ляпунову. Кроме того, $\forall (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \Rightarrow \left|\vec{\varphi}_k(t)\right| \to 0$ при $t \to +\infty \Rightarrow$

$$\left|\vec{\psi}_i(t)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\vec{\varphi}_k(t)\right| \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{x}(t)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_{0k}\vec{\psi}_k(t)\right| \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty ,$$

т.е. нулевое решение устойчиво асимптотически.

Замечание 3.3. Для системы с постоянными коэффициентами (3.2) из устойчивости нулевого решения следует *устойчивость любого решения* в том же смысле, а из неустойчивости – неустойчивость. Поэтому всякую такую *линейную систему* называют либо *устойчивой*, либо *неустойчивой*.

Упражнение. Для системы: $\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y; \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ провести полное исследование устойчивости нулевого решения.

Замечание 3.4. Имеются критерии неположительности действительных частей характеристических уравнений (критерий Рауса-Гурвица, критерий Михайлова и т.п.).

3.3. Устойчивость решений линейных систем ОДУ

Теперь рассмотрим систему

$$\dot{\vec{X}}(t) = A(t)\vec{X}(t) + \vec{F}(t), \qquad (3.3)$$

где функциональная матрица $A(t) = \left\{a_{ij}(t)\right\}_{i,j=1}^{n}$ и правая часть вектора-столбца $\vec{F}(t) = \left\{f_1(t), \ldots, \ f_n(t)\right\}$ непрерывны на $\left[t_0, +\infty\right)$. Тогда при любом $\vec{X}_0 = \left\{x_{10}, \ldots, x_{n0}\right\}$ задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{\vec{X}}(t) = A(t)\vec{X}(t) + \vec{F}(t); \\ \vec{X}\left(t_0\right) = \vec{X}_0 \end{cases}$$

имеет определенное на $\left[t_0, +\infty\right)$ единственное решение.

Лемма 3.1. Любое решение системы (3.3) устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) в том и только том случае, если устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) нулевое решение однородной системы:

$$\dot{\vec{X}}(t) = A(t)\vec{X}(t). \qquad (3.4)$$

Доказательство. Доказательство очевидно следует из линейности системы, так как если $\vec{Y}(t)$ и $\vec{Y}^*(t)$ – два решения (3.3), то $\vec{X}(t) = \vec{Y}(t) - \vec{Y}^*(t)$ – решение системы (3.4). Следовательно, $\vec{Y}^*(t)$ устойчиво (или неустойчиво) в том же смысле, что нулевое решение системы (3.4).

Упражнение. Доказать, что система (3.4) устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда каждое ее решение ограничено на полуоси $\left[t_0, +\infty\right)$ (соответственно, $\left|\vec{y}(t)\right| \to 0$ при $t \to +\infty$).

Для линейных систем имеется много теорем, позволяющих исследовать устойчивость. Приведем одну из них.

<u>Теорема 3.2.</u> Пусть матрицу $A(t)$ в (3.4) можно представить в виде: $A(t) = A + B(t)$, где:

а) A – постоянная матрица, причем система $\dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t)$ устойчива при $t \to +\infty$;

б) $B(t)$ – непрерывная на $\left[t_0, +\infty\right)$ матрица, удовлетворяющая условию: $\int\limits_{t_0}^{+\infty} \left\|B(t)\right\| dt < +\infty$.

Тогда система (3.4) устойчива по Ляпунову при $t \to +\infty$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathrm{X}(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{\underset{\downarrow}{X}}(t) = A\underset{\downarrow}{X}(t)$, удовлетворяющая условию $\mathrm{X}\left(t_0\right) = E$. Тогда общее решение этой системы $\underset{\downarrow}{X}(t) = \mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{X}\left(t_0\right)$.

Будем искать общее решение системы (3.4) в виде $\underset{\downarrow}{y}(t) = \mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t)$. Тогда:

$$\dot{\underset{\downarrow}{y}}(t) = \dot{\mathrm{X}}(t)\underset{\downarrow}{u}(t) + \mathrm{X}(t)\dot{\underset{\downarrow}{u}}(t) = (A + B(t))\,\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t);$$

$$\left(\cancelto{0}{\dot{\mathrm{X}}(t) - A\mathrm{X}(t)}\right)\underset{\downarrow}{u}(t) + \mathrm{X}(t)\dot{\underset{\downarrow}{u}}(t) = B(t)\,\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t);$$

$$\dot{\underset{\downarrow}{u}}(t) = \mathrm{X}(t)\,B(t)\,\mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t),$$

откуда:

$$\underset{\downarrow}{u}(t) = \underset{\downarrow}{u}\left(t_0\right) + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(s)\,B(s)\mathrm{X}(s)\underset{\downarrow}{u}(s)\,ds,$$

и, используя $\underset{\downarrow}{y}(t) = \mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{u}(t)$, $\underset{\downarrow}{y}(t_0) = \underset{\downarrow}{u}(t_0)$, получаем

$$\underset{\downarrow}{y}(t) = \mathrm{X}(t)\underset{\downarrow}{y}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \underbrace{\mathrm{X}(t)\mathrm{X}^{-1}(s)} B(s)\underset{\downarrow}{y}(s)\,ds\,.$$

Учитывая $\mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{At}E$, имеем: $\mathrm{X}(t)\mathrm{X}^{-1}(t_1) = \mathrm{e}^{A(t-s)}E = \mathrm{X}(t-s)$.

$\mathrm{X}(t)$ − фундаментальная матрица устойчивой линейной системы, поэтому $\exists K > 0$: $\|\mathrm{X}(t)\| \le K$ при всех $t \in [t_0, +\infty)$. Но тогда:

$$\|\underset{\downarrow}{y}(t)\| \le K\,\|\underset{\downarrow}{y}(t_0)\| + Kn\int\limits_{t_0}^{t} \|B(s)\|\,\|\underset{\downarrow}{y}(s)\|\,ds\,,$$

отсюда *по лемме Гронуолла–Беллмана* получаем:

$$\|\underset{\downarrow}{y}(t)\| \le K\,\|\underset{\downarrow}{y}(t_0)\| \exp\{Kn\int\limits_{t_0}^{t} \|B(s)\|\,ds\} \le$$

$$\le K\,\|\underset{\downarrow}{y}(t_0)\| \exp\{Kn\int\limits_{t_0}^{+\infty} \|B(s)\|\,ds\}.$$

Из этой оценки и следует устойчивость по Ляпунову нулевого решения, а в силу линейности и системы (3.4).

3.4. Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова)

Вновь возвращаемся к исследованию устойчивости *нулевого решения* общей системы ОДУ (*определенного* на $[t_0, +\infty)$)

$$\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y}). \qquad (3.5)$$

Теорема 3.3. Пусть в некоторой окрестности точки *O* (0,..., 0)$\in R^n_{\vec{y}}$ определена дифференцируемая функция $v(\vec{y})$, удовлетворяющая условиям:

1) $v(\vec{y}) \ge 0$, причем $v(\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$ (т.е. $v(\vec{y})$ имеет в точке *O* (0,..., 0) строгий минимум);

2) $\left.\dfrac{dv(\vec{y})}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t, \vec{y}) \le 0$ при всех $t \ge t_0$.

Тогда нулевое решение системы (3.1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. В пространстве $R_{\bar{y},z}^{n+1}$ рассмотрим график функции $z = v(\vec{y})$. Так как $v(\vec{y})$ – *непрерывная функция*, $v(\vec{y}) > 0$ при $\vec{y} \ne \vec{0}$, то, задав достаточно малое $\varepsilon > 0$, получим, что $\exists C(\varepsilon) > 0$, такая, что:

а) проекция поверхности уровня $v(\vec{y}) = C$ на гиперплоскость $(y_1, \dots, y_n)$ целиком лежит в $U_\varepsilon(0) = \{\vec{y} : |\vec{y}| < \varepsilon\}$;

б) $\exists \delta(C) = \delta(\varepsilon) > 0$: $U_\delta(0)$ лежит внутри этой проекции.

Возьмем точку $M_0(\vec{y}_0) \in U_\delta(0)$. Пусть $\vec{y}(t)$ – фазовая траектория системы (3.1), проходящая при $t = t_0$ через M_0, т.е. $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$. Тогда $v(\vec{y}_0) = C_1 < C$ и по условию

$$\left.\frac{dv(\vec{y}(t))}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t, \vec{y}(t)) \le 0,$$

т.е. $v(\vec{y})$ не возрастает вдоль фазовой траектории $\vec{y}(t)$. В этом случае $\forall t \ge t_0 \Rightarrow v(\vec{y}(t)) \le v(\vec{y}(t_0)) = v(\vec{y}_0) = C_1 < C \Rightarrow |\vec{y}(t)| < \varepsilon$. И тогда $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \left(\vec{y}_0 : \left|\vec{y}_0 - \vec{0}\right| < \delta\right) \Rightarrow \sup\limits_{t \ge t_0} \left|\vec{y}(t) - \vec{0}\right| < \varepsilon$.

Что и доказывает устойчивость по Ляпунову нулевого решения системы (3.1).

Замечание 3.5. Функция $v(\vec{y})$, удовлетворяющая указанным в условии теоремы свойствам, называется *функцией Ляпунова.* Общего способа ее построения нет.

Замечание 3.6. Если в п. 2 теоремы потребовать выполнения более сильного условия:

$$\forall t \ge t_0 \Rightarrow \left.\frac{dv(\vec{y})}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} \le -w(\vec{y}),$$

где $w(\vec{y}) \geq 0$ и непрерывна в некоторой $U_{\delta_0}(0)$, причем $w(\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$, то нулевое решение будет *асимптотически устойчивым*.

Упражнение. Провести доказательство.

Пример 3.1. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4; \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим функцию $v(x,y) = x^4 + y^4$. Она удовлетворяет условию п. 1 теоремы, и, кроме того:

$$\left.\frac{dv(x,y)}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = -4x^4y^4 + 4y^4x^4 = 0,$$

что означает выполнение п. 2 (но не удовлетворяет условию замечания 3.6). Следовательно, нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову.

Теорема 3.4 (Четаева). Пусть область $D \subset R^n_{\vec{y}}$ и функция $v(\vec{y})$ таковы, что:

1) O (0,..., 0) $\in \partial D$, т.е. начало координат лежит на границе D;

2) $v(\vec{y})$ определена в $\overline{D}$, непрерывно дифференцируема и $v(\vec{y}) > 0$ в D, $v(\vec{y}) = \vec{0}$ на $\partial D \cap U_{\varepsilon_0}(0)$, $\varepsilon_0 > 0$;

3) при любом $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\left.\frac{dv(y)}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t, \overline{y}) \geq w(\overline{y}) > 0,$$

где $w(\overline{y})$ непрерывная в D функция.

Тогда нулевое решение системы (3.5) *неустойчиво*.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть задано любое $\delta > 0$, возьмем $\vec{y}_0 \in D$: $|\vec{y}_0| < \delta$. И, следовательно, $v(\vec{y}_0) = \alpha > 0$. Пусть $\vec{y}(t)$ – фазовая траектория

(3.5), проходящая при $t=t_0$ через точку $\vec{y}_0$, т.е. $\vec{y}(t_0)=\vec{y}_0$. Тогда, так как

$$\left.\frac{dv(\vec{y}(t))}{dt}\right|_{\text{в силу системы}}=w(\vec{y}(t))>0,$$

то $v(\vec{y}(t))\geq\alpha>0$ для всех $t\geq t_0$, т.е. траектория при всех $t\geq t_0$ лежит в D и не пересекает линию уровня $v(\vec{y})=\alpha$. Поэтому $\exists\delta_1>0:\ |\vec{y}(t)|>\delta_1$ при всех $t\geq t_0$, а тогда и $w(\vec{y}(t))\geq\beta>0$ при всех $t\geq t_0$. Следовательно,

$$v(\vec{y}(t))\geq v(\vec{y}(t_0))+\beta(t-t_0)\to+\infty,\quad t\to+\infty.$$

Но это означает, что решение $\overline{y}(t)$ выйдет при некотором t на границу шара $|\overline{y}|=\varepsilon_0$. Отсюда следует, что

$$\exists\varepsilon_0>0:\ \forall\delta>0\Rightarrow\exists\left(\overline{y}_0:\ |\overline{y}_0|<\delta\right):\ |y(t)|\geq\varepsilon_0$$

при некотором $t>t_0$. Поэтому нулевое решение неустойчиво, что и требовалось доказать.

<u>Пример 3.2.</u> Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases}\dot{x}=x^5+y^3;\\ \dot{y}=x^3+y^5.\end{cases}$$

<u>Решение.</u> $v(x,y)=x^4-y^4,\ \ D=\{(x,y):\ |x|>|y|\}$. Тогда:

а) $O\ (0,\ 0)\in\partial D$;

б) $v(x,y)>0$ при $|x|>|y|$;

$v(x,y)=0$ при $|x|=|y|$, т.е. на ∂D;

в) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{\text{в силу системы}}=4x^3\left(x^5+y^3\right)-4y^3\left(x^3+y^5\right)=4\left(x^8-y^8\right)=$

$=w(x,y)>0$ при $|x|>|y|$. Следовательно, по теореме Четаева нулевое решение данной системы неустойчиво.

3.5. Устойчивость по первому приближению

Определение 3.3. Пусть при $\forall t \geq t_0$ система (3.1) представима в виде

$$\vec{y}\,' = A(t)\,\vec{y} + \vec{R}(t, \vec{y}), \tag{3.6}$$

где $A(t) = \left\{a_{ij}(t)\right\}_{i,j=1}^{n}$ – функциональная матрица с непрерывными на $\left[t_0, +\infty\right)$ коэффициентами, а вектор-функция $\vec{R}(t, \vec{y})$ удовлетворяет условию:

$$\forall\left(\vec{y}: \ |\vec{y}| \leq C_0\right) \Rightarrow \sup_{t \geq t_0}\left|\vec{R}(t, \vec{y})\right| \leq C_1 |\vec{y}|^{1+\alpha},$$

где C_0, C_1 и α – некоторые положительные постоянные. В этом случае линейная система $\vec{y}\,' = A(t)\,\vec{y}$ называется *системой первого приближения* для исходной системы (3.6).

Теорема 3.5. Пусть при $\forall(t \geq t_0)$ $\vec{R}(t, \vec{y})$ – непрерывно дифференцируемая функция для всех $|\vec{y}| \leq C_0$ (где $C_0 > 0$ – некоторое число), а $A(t) \equiv A$, т.е. система первого приближения – система с постоянными коэффициентами. Тогда:

1) если $\forall \lambda_i: \ \det\left(A - \lambda_i E\right) = 0 \Rightarrow \ \operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то нулевое решение системы (3.6) *асимптотически устойчиво*;

2) если $\exists \lambda_i: \ \operatorname{Re}\lambda_i > 0$, то нулевое решение *неустойчиво*.

Примеры.

3.3. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y; \\ \dot{y} = 2 - \mathrm{e}^{x} - 3y - \cos y. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\left(y - \dfrac{y^3}{6} + o\left(y^3\right)\right); \\ \dot{y} = 2 - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) - 3y - \left(1 - \dfrac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right). \end{cases}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + o\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right); \\ \dot{y} = -x - 3y + o\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right). \end{cases}$$

Система первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda_i < 0.$$

Следовательно, по теореме об устойчивости по первому приближению получаем, что нулевое решение устойчиво.

<u>3.4.</u> Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3; \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Система первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y \\ \dot{y} = 3x \end{cases} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12 = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda_i = 0 \ -$$

теорема об устойчивости по первому приближению не дает ответа. Подбираем функцию Ляпунова: $v(x, y) = 3x^2 + 4y^2$, имеем

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = 6x\left(-4y - x^3\right) + 8y\left(3x - y^3\right) = -\left(6x^4 + 8y^4\right) < 0,$$

причем $w(x, y) = 6x^4 + 8y^4 > 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво (по замечанию 3.6 к теореме Ляпунова).

§ 4. Фазовое пространство

4.1. Показательная функция линейного оператора

Пусть E^n – n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Введем норму, используя скалярное произведение: $\forall x \in E^n \Rightarrow \|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Пусть далее оператор $\hat{A}\colon\ E^n \to E^n$ – линейный в E^n.

Определение 4.1. *Нормой* оператора $\hat{A}$ называется число

$$\left\|\hat{A}\right\| = \sup_{\|x\|=1}\left\|\hat{A}x\right\|.$$

Упражнение. Докажите, что:

1) $\left\|\hat{A}\right\| \geq 0$, причем $\left\|\hat{A}\right\| = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = \theta$ (т.е. $\forall x \in E^n \Rightarrow \hat{A}x = \theta$);

2) $\left\|\lambda\hat{A}\right\| = |\lambda|\left\|\hat{A}\right\|$; $\forall \lambda \in R$;

3) $\left\|\hat{A} + \hat{B}\right\| \leq \left\|\hat{A}\right\| + \left\|\hat{B}\right\|$;

4) $\left\|\hat{A}\cdot\hat{B}\right\| \leq \left\|\hat{A}\right\|\cdot\left\|\hat{B}\right\|$.

Свойства $(1-3)$ из упражнения означают, что множество линейных операторов в E^n само является линейным нормированным пространством: $L\left(E^n, E^n\right)$.

Определение 4.2. Пусть $\left\{\hat{A}_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность линейных операторов в E^n. Тогда $\hat{A} = \lim\limits_{k\to\infty}\hat{A}_k \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} \left\|\hat{A} - \hat{A}_k\right\| \to 0$, $k \to \infty$.

Упражнение. Докажите, что $L\left(E^n, E^n\right)$ – полное нормированное пространство.

Определение 4.3. Рассмотрим ряд, составленный из операторов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\hat{A}_k\,. \tag{4.1}$$

Этот ряд называется сходящимся к $\hat{S}$, если к оператору $\hat{S}$ сходится последовательность его частичных сумм $\hat{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{A}_k$.

<u>Признак Вейерштрасса.</u> Пусть ряд (4.1) таков, что:

1) $\forall k \Rightarrow \exists C_k > 0 : \left\| \hat{A}_k \right\| \le C_k$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k < +\infty$.

Тогда ряд (4.1) сходится.

Зафиксируем в E^n какой-либо базис (необязательно ортонормированный). Пусть $\hat{A} \to A$ – матрица оператора $\hat{A}$ в этом базисе.

<u>Определение 4.4.</u> Экспонентой от оператора $\hat{A}$ называется ряд: $\exp(\hat{A}) \overset{\text{def}}{=} \hat{E} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\hat{A}^k}{k!}$, где $\hat{E}$ – единичный оператор.

Если $\left\| \hat{A} \right\|$ – норма оператора $\hat{A}$, то $\left\| \hat{A}^k \right\| \le \left\| \hat{A} \right\|^k$, ряд экспоненты *мажорируется* сходящимся числовым рядом $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\left\| \hat{A} \right\|^k}{k!}$ и тогда по признаку Вейерштрасса он *сходится*.

Если A – матрица оператора $\hat{A}$ в каком-либо базисе, то в силу изоморфизма имеем: $\mathrm{e}^{\hat{A}} \leftrightarrow \mathrm{e}^{A}$ в том же базисе (матрица e^{A} определяется аналогично). Таким образом, достаточно научиться считать величину e^{A}, где A – квадратная матрица $(n \times n)$.

Свойства матричной экспоненты.

1. Если $AB = BA$, т.е. матрицы A и B коммутируют, то $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}$.

<u>Доказательство.</u> В силу выполнения признака Вейерштрасса ряды матриц ведут себя как абсолютно сходящиеся числовые ряды. Поэтому

$$e^A\cdot e^B=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B^m}{m!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^kB^m}{k!m!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n}{n!}=e^{A+B}.$$

2. Если $B=S^{-1}AS$, то $e^B=S^{-1}e^AS$.

Доказательство. Так как $B^k=S^{-1}A^kS$, то отсюда и следует утверждение.

3. Если $B=\operatorname{diag}(A_1,\ldots,A_m)$, то $e^B=\operatorname{diag}\left(e^{A_1},\ldots,e^{A_m}\right)$.

Доказательство. Доказательство следует из того, что $\left(\operatorname{diag}(A_1,\ldots,A_m)\right)^k = \ =\operatorname{diag}\left(A_1^k,\ldots,A_m^k\right)$.

4. Рассмотрим $J_p=\lambda_pE_r+I_r^{(1)}$, где E_r – единичная матрица размера $(r\times r)$, а $I_r^{(1)}$ – первый косой ряд единиц. Так как λ_pE_r и $I_r^{(1)}$ коммутируют, то по свойству 1 получаем:

$$e^{J_p}=e^{\lambda_pE_r}\cdot e^{I_r^{(1)}}.$$

Легко увидеть, что $e^{\lambda_pE_r}=e^{\lambda_p}\cdot E_r$. Далее

$$\left(I_r^{(1)}\right)^2=\begin{pmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1\\0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&\ldots&0\\0&0&0&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1\\0&0&0&\ldots&0\\0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}=I_r^{(2)} \ –$$

второй косой ряд единиц. Таким образом:

$$\left(I_r^{(1)}\right)^k=I_r^{(k)},\quad 1\le k\le r-1,\quad \left(I_r^{(1)}\right)^r=0,$$

где $(r\times r)$ – размерность этой матрицы.

5. Пусть жорданова форма матрицы A связана с самой матрицей A через матрицу перехода S по закону:

$J=S^{-1}AS\Rightarrow A=SJS^{-1}$. Тогда $e^{tA}=S^{-1}\operatorname{diag}\left(e^{tJ_1(\lambda_1)},\ldots,e^{tJ_m(\lambda_m)}\right)S$, где $e^{tJ_p(\lambda_p)} = e^{\lambda_p t} E_r \cdot e^{tI_r^{(1)}}$, и

$$e^{tI_r^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \ldots & \dfrac{t^{r-2}}{(r-2)!} & \dfrac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \dfrac{t^{r-3}}{(r-3)!} & \dfrac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 4.1.</u> Вычислить e^{tA}, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>*Решение.*</u> Так как A – жорданова клетка, то

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>*Упражнения.*</u>

1. Докажите признак Вейерштрасса.

2. Докажите, что отображение $\hat{A} \to A$ является изоморфизмом пространства $L\left(E^n, E^n\right)$ на пространство матриц $(n \times n)$.

4.2. Однопараметрическая группа преобразований $\left\{e^{tA}\right\}$

Определение 4.5. Множество элементов $G=\{g\}$ называется *группой*, если для любых элементов $g_1,\ g_2\in G$ определена *групповая операция* «$*$», удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ – *ассоциативность*;

2) $\exists e\in G:\ \ e*g=g*e$ для $\forall g\in G$; e – *единица* группы;

3) $\forall g\in G \Rightarrow\ \ \exists g^{-1}\in G:\ \ g^{-1}*g=g*g^{-1}=e$; g^{-1} – *обратный элемент для* g.

Примеры.

4.2. Группа матриц $n\times n$ относительно операции умножения (эта группа некоммутативная).

4.3. R – группа вещественных чисел относительно операции сложения (коммуникативная ≡ абелева группа).

4.4. $SO(n)$ – группа ортогональных матриц $(n\times n)$ с определителем равным 1 (специальная ортогональная группа).

4.5. $\left\{e^{tA}\right\}_{t\in R}$, A – фиксированная матрица – абелева группа, так как:

а) $e^{t_1A}\cdot e^{t_2A}=e^{(t_1+t_2)A}$;

б) ассоциативность очевидна;

в) $\exists e^{0A}=E$ – единица группы;

г) e^{-tA} – обратный элемент этой группы.

Эту группу будем называть однопараметрической группой преобразований пространства E^n. Имеем:

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=\frac{d}{dt}\left(E+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}\right)=A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}=Ae^{tA}.$$

Теорема 4.1. Рассмотрим систему $\dot{X}(t)=AX(t)$. Тогда решение с начальным условием $X(0)=X_0$ задается формулой $X(t)=e^{tA}X_0$.

Доказательство. Дифференцируя $X(t)$, имеем:

$$\frac{d}{dt}X(t) = A\mathrm{e}^{tA}X_0 = AX(t),\ X(0) = X_0 .$$

4.3. Фазовое пространство, фазовый поток, фазовые кривые

Определение 4.6. Рассмотрим систему

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X},\ \vec{X} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^T . \tag{4.2}$$

Тогда пространство E^n называется *фазовым пространством* этой системы, точки E^n – *фазовые*.

Определение 4.7. Пара $\left(E^n, \left\{\mathrm{e}^{tA}\right\}_{t\in R}\right)$ называется *фазовым потоком*.

Определение 4.8. Кривая в E^n $X(t) = \mathrm{e}^{tA}X_0$ называется *фазовой*, проходящей через точку $X_0 \in E^n$. Фазовая кривая – это фазовая траектория точки X_0 под действием группы $\left\{\mathrm{e}^{tA}\right\}$.

Определение 4.9. Точка $\vec{X}_0 \in E^n$ называется *положением равновесия* системы $\dot{\vec{X}} = A\vec{X}$ (неподвижной точкой фазового потока), если $\forall t \in R \Rightarrow$ $\dot{\vec{X}}(t) = \mathrm{e}^{tA}\vec{X}_0 \equiv \vec{X}_0$.

Замечание. Для рассматриваемого случая $\vec{X}_0 = \vec{0}$ – неподвижная точка.

Определение 4.10. Пространство $E^{n+1} = E^1 \times E^n = \left\{\left(t, \vec{X}\right)\right\}$, где E^n – фазовое пространство системы (4,2), называется *расширенным фазовым пространством* системы (4.2).

График $X(t) = \mathrm{e}^{tA}X_0$ в расширенном фазовом пространстве называется *интегральной кривой* потока $\left(E^n, \left\{\mathrm{e}^{tA}\right\}\right)$ (системы 4.2).

4.4. Фазовые траектории на плоскости

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами с двумя искомыми функциями:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad (4.3)$$

Фазовое пространство в этом случае двумерно – *фазовая плоскость*, соответствующая группа фазового потока $\left\{ \mathrm{e}^{tA} \right\}$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Исследуем в этом случае *все фазовые траектории*.

Сразу отметим, что при любой матрице A точка $\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ является *положением равновесия* системы. Поведение кривых будет определяться корнями характеристического уравнения:

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть λ_1 и λ_2 – корни этого уравнения.

Возможны следующие случаи.

I. $\Delta = \det A \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

а) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – *вещественные*. Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

где $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ – два линейно независимых собственных вектора матрицы A (рис. 4.1).

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Рассмотрим на фазовой плоскости $0xy$ прямые, проходящие через начало координат в направлении собственных векторов $\vec{h}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ и $\vec{h}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ матрицы A. Эти прямые сами являются фазовыми траекториями:

$$C_1 \neq 0,\ \ C_2 = 0 \ \Rightarrow\ \frac{y}{x} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \qquad C_1 = 0,\ \ C_2 \neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{y}{x} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

Строим эти траектории. Далее, если $t \to +\infty$, то:

$$x(t) = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} \to 0, \quad y(t) = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} \to 0,$$

т.е. при $t \to +\infty$ *по любой траектории точка движется в начало координат*. Считаем производную y'_x:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{C_1\beta_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1\alpha_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1\beta_1\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\beta_2\lambda_2}{C_1\alpha_1\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\alpha_2\lambda_2}.$$

При $t \to +\infty \Rightarrow\ y'_x \to \beta_2/\alpha_2$, это означает, что при $t \to +\infty$ все траектории входят в начало координат, касаясь прямой с направляющим вектором $\vec{h}_2$ (отвечающим меньшему по модулю собственному значению матрицы *A*). Если же $t \to -\infty$, то $y'_x \to \beta_1/\alpha_1$. Это означает, что на «$-\infty$» фазовые траектории имеют асимптоты, параллельные прямой с направляющим вектором $\vec{h}_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}$ (отвечающим большему по абсолютной величине собственному значению *A*). Кроме того, *точка O* (0, 0) – сама является *фазовой траекторией*. Это *положение равновесия*, которое называется *устойчивым узлом* (см. рис 4.1, *а*).

2. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. В этом случае замена $t \to -t$ сводит рассматриваемые траектории к траекториям пункта 1. Начертание фазовых траекторий не изменится (см. рис 4.1, *б*), но направление движения точки по траектории с возрастанием *t* сменится на противоположное. *O* (0, 0) – *точка покоя*, в этом случае положение равновесия − *неустойчивый узел*.

3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. В этом случае: $y'_x \to \beta_2/\alpha_2$ при $t \to +\infty$, $y'_x \to \beta_1/\alpha_1$ при $t \to -\infty$. $O\,(0, 0)$ – *точки покоя*. Она называется *седлом* (см. рис 4.1, *в*).

б) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – *комплексные*. Тогда $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha + i\beta$.

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = \left(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t\right)e^{\alpha t}; \\ y(t) = \left(\tilde{C}_1\cos\beta t + \tilde{C}_2\sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ – их линейные комбинации. Возможны следующие случаи (рис. 4.2).

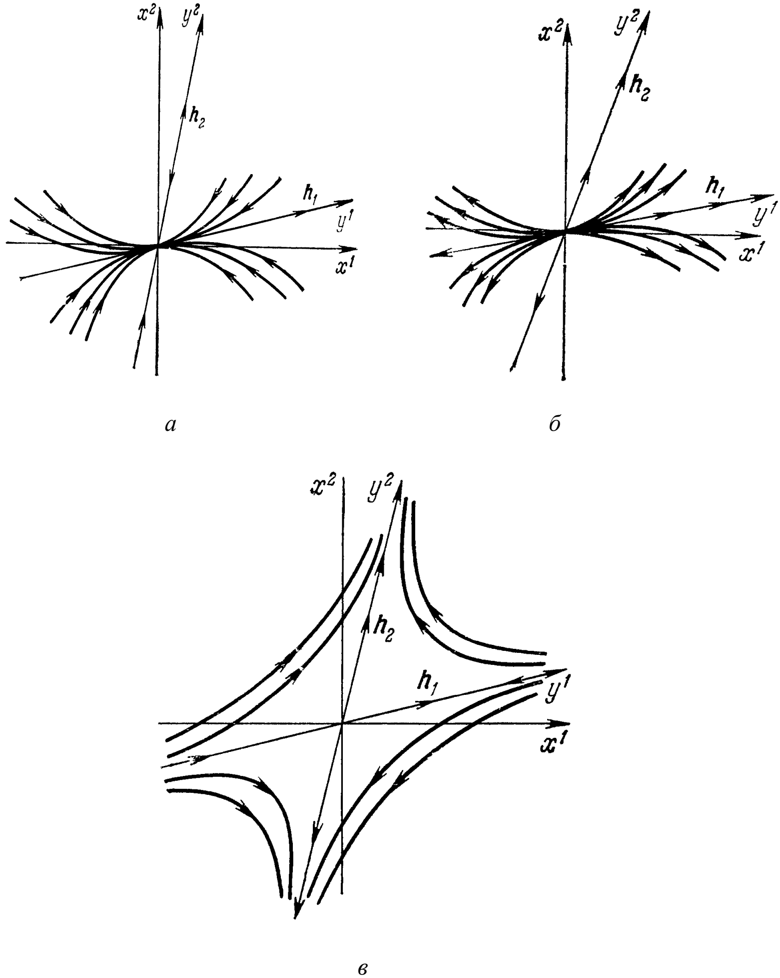


Рис. 4.1. Фазовые траектории вблизи точки равновесия в случае действительных, отличных от нуля собственных значений $\lambda_1 \neq \lambda_2$:
а – устойчивый узел; *б* – неустойчивый узел; *в* – «седло»

1. $\alpha = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 x - C_1 y = \left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right) \sin \beta t; \\ \tilde{C}_2 x - C_2 y = \left(\tilde{C}_2 C_1 - \tilde{C}_1 C_2\right) \cos \beta t, \end{cases}$$

т.е. получаем *семейство кривых*

$$\frac{\left(\tilde{C}_1 x - C_1 y\right)^2}{\left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right)^2} + \frac{\left(\tilde{C}_2 x - C_2 y\right)^2}{\left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right)^2} = 1.$$

В этом случае точка покоя $O\,(0,\,0)$ называется *центром* (см. рис. 4.2, *а*).

Центр – траектория, *устойчивая по Ляпунову*, но *не асимптотически устойчивая*. Все траектории центра замкнутые. Для того чтобы найти направления движения по этим траекториям, нужно взять точку $M_0\left(x_0,\, y_0\right)$, подсчитать вектор скорости $\vec{V}\left(x, y\right)$ в этой точке $M_0\left(x_0,\, y_0\right)$ из системы (4.3).

Имеем: $\vec{V} = \left\{ \dot{x}\left(t\right), \dot{y}\left(t\right) \right\}\Big|_{M_0} = \left\{ ax + by,\; cx + dy \right\}\Big|_{M_0}$.

Замечательное свойство поля скоростей $\vec{V}\left(t\right)$: так как точка покоя только одна (точка $O\,(0,\,0)$) и $\vec{V}\left(t\right)$ непрерывно зависит от $M\left(x, y\right)$, то *вдоль любой траектории направление движения не меняется, на всех траекториях направление движения одинаково*!

2. $\alpha \neq 0$. Аналогичные выкладки дают:

$$\frac{\left(\tilde{C}_1 x - C_1 y\right)^2}{\left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right)^2} + \frac{\left(\tilde{C}_2 x - C_2 y\right)^2}{\left(\tilde{C}_1 C_2 - \tilde{C}_2 C_1\right)^2} = \mathrm{e}^{2\alpha t}.$$

В этом случае точка покоя $O\,(0,\,0)$ называется *фокусом*. Если $\alpha < 0$, то при $t \to +\infty$ точка по любой траектории неограниченно приближается к точке $O\,(0,\,0)$, т.е. при $\alpha < 0$ *фокус асимптотически устойчив* (см. рис. 4.2, *б*). Если же $\alpha > 0$, то при $t \to +\infty$ точка по любой траектории уходит на бесконечность, т.е. при $\alpha > 0$ точка $O\,(0,\,0)$ неустойчива – *неустойчивый* фокус (см. рис. 4.2, *б*).

в) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ (так как $\Delta \neq 0$). В этом случае λ_1 и λ_2 – обязательно вещественные числа. Возможны следующие случаи.

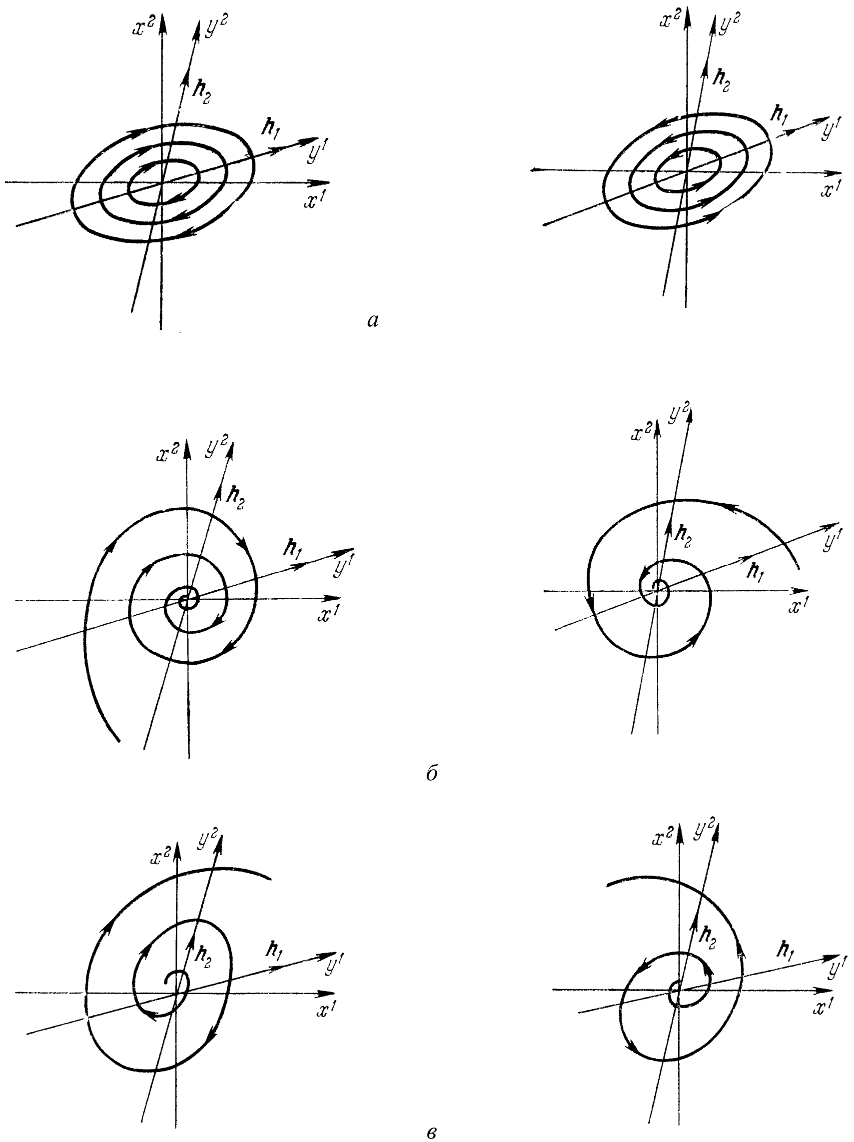
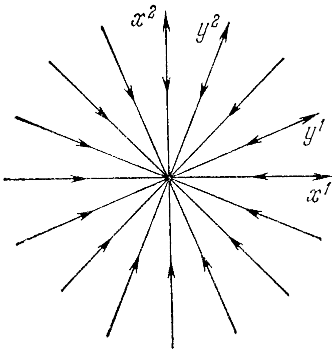


Рис. 4.2. Фазовые траектории вблизи точки равновесия в случае комплексных собственных значений $\lambda_1 \neq \lambda_2$:
а – центр; *б* – устойчивый фокус; *в* – неустойчивый фокус

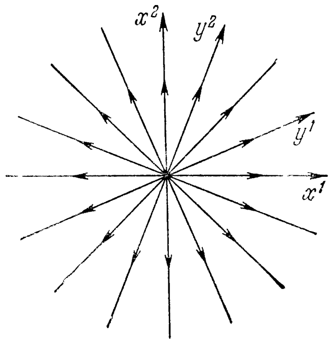
1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, $\operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 0$, т.е. $A - \lambda E = O$ – нулевая матрица. Но тогда исходная система (4.3) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x; \\ \dot{y} = \lambda y, \end{cases} \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad y(t) = C_2 \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Фазовые траектории – *всевозможные полупрямые*, исходящие из начала координат. Точка покоя O (0, 0) в этом случае называется *дикритическим узлом* (рис. 4.3).



а



б

Рис. 4.3. Фазовые траектории вблизи точки равновесия в случае действительных собственных значений $\lambda_1 = \lambda_2$ (дикритический узел): *а* – устойчивый; *б* – неустойчивый

Если $\lambda < 0$, то дикритический узел *асимптотически устойчив* (см. рис.4.3, *а*), если $\lambda > 0$ – то *неустойчив* (см. рис.4.3, *б*).

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, $\operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 1$. Общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left[C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 t \\ \beta_2 + \beta_3 t \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{\lambda t},$$

где $\vec{h}_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}$ – собственный вектор, а $\vec{h}_2 = \{\alpha_2, \beta_2\}$, $\vec{h}_3 = \{\alpha_3, \beta_3\}$ – некоторые векторы. Уточним структуру решения, имеем:

$$\left(\left[C_1 \underset{\downarrow}{h_1} + C_2\left(\underset{\downarrow}{h_2} + \underset{\downarrow}{h_3}\, t\right)\right]\mathrm{e}^{\lambda t}\right)' = A\left[C_1 \underset{\downarrow}{h_1} + C_2\left(\underset{\downarrow}{h_2} + \underset{\downarrow}{h_3}\, t\right)\right]\mathrm{e}^{\lambda t},$$

приравнивая коэффициенты при $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, получаем: $\lambda \underset{\downarrow}{h_3} = A \underset{\downarrow}{h_3}$, т.е. $\underset{\downarrow}{h_3}$ – *собственный вектор A*. Тогда $\underset{\downarrow}{h_3} \sim \underset{\downarrow}{h_1}$. Следовательно, меняя константы, можно считать, что $\underset{\downarrow}{h_3} = \underset{\downarrow}{h_1}$ (!).

Получили *общее решение*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left[C_1 \underset{\downarrow}{h_1} + C_2\left(\underset{\downarrow}{h_2} + \underset{\downarrow}{h_1}\, t\right)\right]\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Точка покоя $O\,(0,\,0)$ в этом случае называется *вырожденным узлом* (рис. 4.4). Если $\lambda < 0$, то вырожденный узел *асимптотически устойчив* (см. рис. 4.4, *а*), а если $\lambda > 0$ – то *неустойчив* (см. рис. 4.4, *б*). Среди фазовых траекторий имеется *одна прямолинейная* – $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$, т.е. траектория в направлении собственного вектора $\vec{h}_1$.

Далее имеем:

$$y'_x = \frac{C_2\beta_1 + \lambda\left(C_1\beta_1 + C_2\left(\beta_2 + \beta_1 t\right)\right)}{C_2\alpha_1 + \lambda\left(C_1\alpha_1 + C_2\left(\varepsilon_2 + \alpha_1 t\right)\right)} \to \frac{\beta_1}{\alpha_1} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Следовательно, при $\lambda < 0$ все траектории входят в точку $O\,(0,\,0)$, при $t \to +\infty$ касаясь прямой $y = (\beta_1 / \alpha_1)x$, и уходят из "$-\infty$" под этим же углом (аналогично при $\lambda > 0)$. Для уточнения хода траекторий строятся несколько векторов поля скоростей.

II. Рассмотрим случай $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$. В этом случае хотя бы один из корней характеристического уравнения *равен нулю* (а следовательно, оба корня действительны).

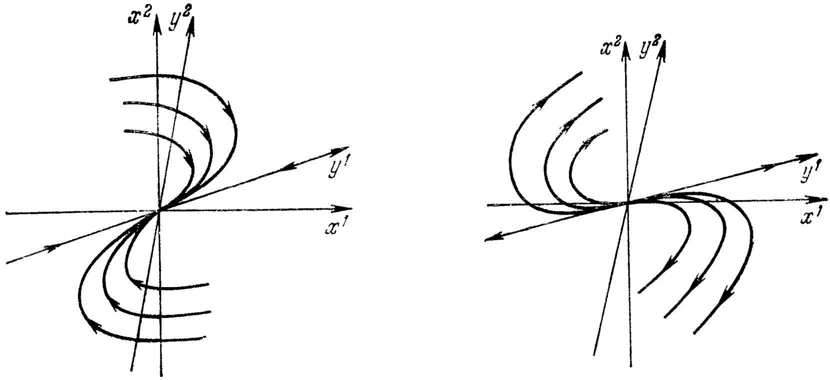
а) $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0$. Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{t\lambda_2},$$

где $\vec{h}_1 = \{\alpha_1, \beta_2\}$ и $\vec{h}_2 = \{\alpha_2, \beta_2\}$ – собственные векторы матрицы A. Если $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$, то получаем фазовую траекторию $y = (\beta_1 / \alpha_1)x$. *На этой траектории каждая точка – точка покоя!* Все остальные траектории $(C_2 \neq 0)$ – также прямолинейные

$$\frac{y - C_1\beta_1}{x - C_1\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

Все они параллельны вектору $\vec{h}_2$. При $\lambda < 0$ точки по этим траекториям "движутся" к прямой $y = (\beta_1 / \alpha_1)x$. При $\lambda < 0$ все точки покоя *устойчивы по Ляпунову* (*но не асимптотически*), при $\lambda > 0$ – неустойчивы.



а *б*

Рис. 4.4. Фазовые траектории вблизи точки равновесия в случае действительных собственных значений $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (вырожденный узел): *а* – устойчивый; *б*– неустойчивый

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В этом случае возможны следующие ситуации.

1. $\mathrm{Rang}(A - 0E) = 0$. Тогда $A = O$ – нулевая матрица. *Общее решение* $x(t) = C_1$, $y(t) = C_2$. *Каждая точка плоскости – точка покоя*, устойчивая по Ляпунову, но не асимптотически.

2. $\mathrm{Rang}(A-0E)=1$. *Общее решение*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_2+\alpha_3 t \\ \beta_2+\beta_3 t \end{pmatrix},$$

где $\vec{h}_1=\{\alpha_1,\ \beta_2\}$ – собственный вектор. Вновь показываем, что $\vec{h}_3=\{\alpha_3,\ \beta_3\}=\vec{h}_1$. *Среди траекторий имеется* $(C_2=0,\ C_1\neq 0)$ *траектория* $y=(\beta_1/\alpha_1)x$, *целиком состоящая из точек покоя*. Остальные траектории – *прямые, параллельные прямой* $y=(\beta_1/\alpha_1)x$:

$$\frac{y-C_1\beta_1-C_2\beta_2}{x-C_1\alpha_1-C_2\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

Поле скоростей $\vec{V}(t)=\left\{\dot{x}(t),\dot{y}(t)\right\}=C_2\vec{h}_1$ *меняет направление* при изменении знака C_2. Точка O (0,0) и другие положения равновесия неустойчивы.

Были рассмотрены всевозможные виды фазовых траекторий в этом простейшем случае.

§ 5. Первые интегралы системы ОДУ

Вновь рассматриваем систему ОДУ

$$\vec{y}\,'=\vec{f}(t,\vec{y}), \tag{5.1}$$

где $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, $\vec{f}=(f_1(t,\vec{y}),\ldots,f_n(t,\vec{y}))$ – *непрерывно дифференцируемая в некоторой области* $G\subseteq E^{n+1}_{t,\bar{y}}$ вектор-функция.

<u>Определение 5.1.</u> Функция $\psi(t,\vec{y})$, удовлетворяющая в некоторой подобласти $G'\leq G$ условиям:

1) $\psi(t,\vec{y})$ непрерывно дифференцируема в G' и не равна в G' тождественно постоянной;

2) $\psi(t,\vec{y})\equiv\mathrm{const}$ *вдоль любого решения* $\vec{y}=\vec{y}(t)$ системы (5.1), проходящего в G', называется *первым интегралом системы* (5.1) в G'.

Теорема 5.1 (критерий первого интеграла). Пусть $\vec{f}(t,\vec{y}) \in C^1(G)$, $G \subseteq E^{n+1}_{t,\vec{y}}$. Тогда не равная тождественно постоянной, непрерывно дифференцируемая в $G' \subseteq G$ функция $\psi(t,\vec{y})$ будет в G' первым интегралом системы (5.1) в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} f_i(t,\vec{y}) \equiv 0 \quad \text{в } G'.$$

Доказательство. Необходимость. Если $\psi(t,\vec{y})$ – первый интеграл системы (5.1) в G', то для любого решения $\vec{y}(t)$ системы (5.1) в G' получаем $\psi(t,\vec{y}(t)) \equiv \text{const}$ (при этом вдоль разных решений константы, вообще говоря, разные). Дифференцируя это тождество, получаем

$$0 \equiv \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} f_i(t,\vec{y})$$

всюду в области G', так как через каждую точку G' в силу теоремы существования и единственности (ТСЕ) проходит решение системы (5.1).

Достаточность. Если функция $\psi(t,\vec{y})$ удовлетворяет в G' условиям теоремы, а $\vec{y}(t)$ – какое-либо решение (5.1) в G', то

$$0 \equiv \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} f_i(t,\vec{y}) = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \frac{d}{dt}\psi(t,\vec{y}(t)),$$

где справа записана *производная вдоль решения*. Но тогда $\psi(t,\vec{y}(t)) \equiv \text{const}$ вдоль этого решения. Таким образом $\psi(t,\vec{y})$ – первый интеграл системы (5.1).

Замечание. Иногда первым интегралом системы (5.1) называют равенство $\psi(t,\vec{y}) \equiv \text{const}$, где $\psi(t,\vec{y})$ – функция из определения 5.1.

Напомним следующие определения.

Определение 5.2. Система функций $\{\psi_k(t,\vec{y})\}_{k=1}^{m}$ называется *зависимой в* G, если хотя бы одна из этих функций, например $\psi_1(t,\vec{y})$, представима на G в виде

$$\psi_1(t,\vec{y}) = \Phi\left(\psi_2(t,\vec{y}),\ldots,\psi_m(t,\vec{y})\right), \tag{5.2}$$

где $\Phi\left(z_1,\ldots,z_{m-1}\right)$ – некоторая функция, которую далее считаем *непрерывно дифференцируемой* в соответствующей области переменной $\vec{z}=\left(z_1,\ldots,z_{m-1}\right)$. Если же представление (5.2) не имеет места в G ни для одной из $\psi_i(t,\vec{y})$, то система $\left\{\psi_k\right\}_{k=1}^{m}$ называется *независимой в G*.

<u>Теорема 5.2 (о существовании первых интегралов).</u> Если $\vec{f}(t,\vec{y})\in C^1(G)$, $G\subseteq E_{t,\vec{y}}^{n+1}$, то $\forall\left(t_0,\vec{y}_0\right)\in G\Rightarrow \;\Rightarrow\exists U_\delta\left(t_0,\vec{y}_0\right)$, в которой система (5.1) *имеет n независимых первых интервалов*.

<u>Теорема 5.3.</u> Пусть $\left\{\psi_k(t,\vec{y})\right\}_{k=1}^{m}$ – n первых интегралов системы (5.1) в некоторой окрестности точки $M_0\left(t_0,\vec{y}_0\right)\in G$. Допустим, что

$$J=\left.\frac{D\left(\psi_k(t,\vec{y}),\ldots,\psi_n(t,\vec{y})\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_n\right)}\right|_{M_0}\neq 0 .$$

Тогда в некоторой окрестности точки M_0 система уравнений

$$\begin{cases}\psi_1(t,\vec{y})=C_1;\\ \;.\;.\;.\;;\\ \psi_n(t,\vec{y})=C_n\end{cases}\tag{3}$$

определяет (при подходящем выборе констант $C_1,\ldots,C_n$) любое решение системы (5.1), – *общее решение* (5.1) в окрестности точки M_0.

<u>*Доказательство.*</u> В силу непрерывной дифференцируемости функций $\psi_k(t,\vec{y})\Rightarrow J\neq 0$ в некоторой окрестности точки M_0. По теореме о системе неявных функций получаем, что существует и притом единственное решение системы (5.3)

$$y_1=\varphi_1\left(t,C_1,\ldots,C_n\right),\ldots,\;\; y_n=\varphi_n\left(t,C_1,\ldots,C_n\right),$$

определенное и *непрерывно дифференцируемое* в некоторой окрестности точки t_0. Положим $C_i=\psi_i\left(t_0,\vec{y}_0\right)$. Тогда в силу единственности решения системы (5.3) получим: $\vec{y}\left(t_0\right)=\vec{\varphi}\left(t_0,\vec{\psi}\left(t_0,\vec{y}_0\right)\right)=$

$=\vec{y}_0$, т.е. кривая $\vec{y}=\vec{\varphi}\left(t,\vec{\psi}\left(t_0,\vec{y}_0\right)\right)=\vec{y}\left(t;\vec{y}_0,t_0\right)$ проходит через точку $\left(t_0,\vec{y}_0\right)$. Далее из (5.3), дифференцируя эти равенства, получаем:

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_k}{\partial y_i}y'_i(t)=0,\ k=1,2,\ldots n\ , \tag{5.4}$$

и в силу критерия первого интеграла

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_k}{\partial t}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial\psi_k}{\partial y_i}f_i(t,\vec{y})=0;\\ k=1,\ 2,\ldots,n.\end{cases} \tag{5.5}$$

Из систем (5.4) и (5.5), в силу того, что $\dfrac{D\left(\psi_1,\ldots,\psi_n\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_n\right)}\neq 0$ в окрестности точки M_0, получаем, что $\vec{y}\,'(t)\equiv\vec{f}(t,\vec{y})$, т.е. $\vec{y}\left(t;t_0,\vec{y}_0\right)$ есть решение системы (5.1) с данными Коши $\vec{y}\left(t_0\right)=\vec{y}_0$. Таким образом, (5.3) определяет общее решение системы (1) *в форме Коши.*

Замечание. Для вычисления первых интегралов системы (5.1) часто бывает удобно переписать эту систему в симметричной форме, положив сначала $\dfrac{dy_1}{f_1(t,\vec{y})}=\dfrac{dy_2}{f_2(t,\vec{y})}=\ldots=\dfrac{dy_n}{f_n(t,\vec{y})}=dt$,

а затем переобозначив

$$y_i\to x_i,\ t\to x_{n+1},\ f_i\left(t,y_i\right)=f_i(\vec{x}),\quad n+1\to n.$$

Тогда (5.1) запишется в виде: $\dfrac{dx_1}{f_1(\vec{x})}=\ldots=\dfrac{dx_n}{f_n(\vec{x})}$.

Примеры.

5.1. $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{x+z}=\dfrac{dz}{x+y}$.

Решение. $\dfrac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=\dfrac{d(x-y)}{y-x}\Rightarrow(x+y+z)(x-y)^2=C_1$,

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=\frac{d(y-z)}{z-y}\Rightarrow(x+y+z)(y-z)^2=C_2.$$

Ответ. $\begin{cases} (x+y+z)(x-y)^2 = C_1, \\ (x+y+z)(y-z)^2 = C_2. \end{cases}$

5.2. $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$.

Решение. $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} \Rightarrow \dfrac{y}{z} = C_1$;

$$\frac{dx - 2ydy - 2zdz}{x - y^2 - z^2} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{x - y^2 - z^2}{z} = C_2.$$

Ответ. $\begin{cases} y = C_1 z, \\ x - y^2 - z^2 = C_2 z. \end{cases}$

5.3. Дана система

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2 - t}{y}, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Являются ли функции $\psi_1 = t^2 + 2xy$, $\psi_2 = x^2 - ty$ первыми интегралами системы?

Решение.

$$\left.\frac{d\psi_1}{dt}\right|_{\text{вдоль решения}} = 2t + 2y\frac{x^2 - t}{y} + 2x(-x) \equiv 0,$$

т.е. $\psi_1 = t^2 + 2xy$ – первый интеграл системы;

$$\left.\frac{d\psi_2}{dt}\right|_{\text{вдоль решения}} = -y + 2x\frac{x^2 - t}{y} - t(-x) \not\equiv 0,$$

т.е. $\psi_2 = x^2 - ty$ не является первым интегралом системы.

5.4. Проверить, являются ли независимыми первые интегралы $\dfrac{x+y}{z+x} = C_1$, $\dfrac{z-y}{x+y} = C_2$ системы $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$.

Решение. Сначала проверим, что это первые интегралы данной системы:

$$\frac{d(x+y)}{x+y}=\frac{d(x+z)}{x+z}\Rightarrow\frac{x+y}{x+z}=C_1;$$

$$\frac{d(z-y)}{z-y}=\frac{d(x+y)}{x+y}\Rightarrow\frac{z-y}{x+y}=C_2,$$

т.е. это первые интегралы.

Однако

$$C_2-\frac{1}{C_1}=-1,$$

следовательно,

$$C_2=\frac{1-C_1}{C_1},$$

т.е. эти интегралы зависимы.

§ 6. Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка

Определение 6.1. Уравнение вида

$$\alpha_1(\vec{x})\frac{\partial z}{\partial x_1}+\alpha_2(\vec{x})\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_n(\vec{x})\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \tag{6.1}$$

где $\vec{\alpha}(\overline{x})$ – заданная в некоторой области $G\subseteq E_{\vec{x}}^n$ вектор-функция, а $z=z(\overline{x})$ – искомая функция, называется (*однородным*) *линейным* дифференциальным уравнением первого порядка с частными производными.

Определение 6.2. Непрерывно дифференцируемая в *G* функция $z=z(\vec{x})$ называется решением (6.1) в *G*, если после подстановки ее в уравнение (6.1), оно обращается в тождество в *G*.

Замечания. 1. Таким образом, ищем *потенциальное поле* $\vec{A}(\vec{x})=\operatorname{grad}z(\vec{x})$, *ортогональное* в *G* заданному полю $\vec{\alpha}(\vec{x})$.

2. Если в точке $\vec{x}_0 \in G \Rightarrow \left|\vec{\alpha}\left(\vec{x}_0\right)\right| = 0$, то точка $\overline{x}_0$ называется *особой точкой* уравнения (6.1) (и, соответственно, поля $\vec{\alpha}(\vec{x})$).

3. Далее рассмотрим *непрерывно дифференцируемое* в G поле $\vec{\alpha}(\vec{x})$ *без особых точек*.

<u>Теорема 6.1.</u> Рассмотрим уравнение (6.1) и систему ОДУ

$$\frac{dx_1}{\vec{\alpha}_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{\vec{\alpha}_2(\vec{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{\vec{\alpha}_n(\vec{x})}. \qquad (6.2)$$

Тогда непрерывно дифференцируемая в G функция $z(\vec{x}) \not\equiv \text{const}$ в G является *решением* уравнения (6.1) $\Leftrightarrow$ $z(\vec{x})$ – *первый интеграл* (6.2). Кроме того, $z(\vec{x}) \equiv \text{const}$ также очевидно решение (6.1).

<u>Доказательство.</u> Уравнение (6.1) означает, что производная вдоль решения системы (6.2) равна нулю. Пользуясь критерием первого интеграла (теорема 5.1), получаем нужное утверждение.

<u>Теорема 6.2 (общий вид решения уравнения (6.1)).</u> Пусть $\left\{\psi_k(\vec{x})\right\}_{k=1}^{n-1}$ – $(n-1)$ независимый первый интеграл системы (6.2) на G; $\vec{x}_0 \in G$ и

$$\frac{D\left(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}\right)}{D\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right)} \neq 0$$

в $\vec{x}_0$.

Тогда:

1) если $z = z(\vec{x})$ – решение (6.1) на G, то, по крайней мере, в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0$ имеет место представление $z(\vec{x}) = \Phi\left(\psi_1(\vec{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\vec{x})\right)$, где Φ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция;

2) обратно, любая функция $z(\vec{x}) = \Phi\left(\psi_1(\vec{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\vec{x})\right)$ является решением (6.1), если только $\Phi\left(y_1, \ldots, y_{n-1}\right)$ – непрерывно дифференцируемая в соответствующей области функция.

<u>Доказательство.</u> 1. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\alpha_2(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_n(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n}=0; \\ \quad . \quad . \quad . \quad .; \\ \alpha_1(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}+\alpha_2(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_n(\vec{x})\dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}=0; \\ \quad . \quad . \quad . \quad .; \\ \alpha_1(\vec{x})\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+\alpha_2(\vec{x})\dfrac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_n(\vec{x})\dfrac{\partial z}{\partial x_n}=0 \end{cases}$$

относительно $\vec{\alpha}(\vec{x})$. Так как $|\vec{\alpha}(\vec{x})|\neq 0$ ни в одной точке (и в частности в точке $\vec{x}_0$), то

$$\frac{D(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1},z)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\equiv 0 \quad \text{в } G.$$

Кроме того, по крайней мере, один минор порядка $(n-1)$, стоящий в $(n-1)$ первой строке, не равен нулю в точке $\vec{x}_0$, а следовательно, и в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0$.

Без ограничений общности можно считать, что

$$\frac{D(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})}{D(x_1,\ldots,x_{n-1})}\neq 0 \quad \text{в } U_\delta(x_0).$$

Тогда по теореме о достаточных условиях зависимости функций получим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(y_1,\ldots,y_{n-1})$, такая, что $z(\vec{x})=\Phi(\psi_1(\vec{x}),\ldots,\psi_{n-1}(\vec{x}))$.

2. *Обратно*. Дифференцируя функцию $z(\vec{x})$ по x_i и складывая, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial y_k}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\vec{x})\frac{\partial z}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial y_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\vec{x})\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}\right)=0,$$

т.е. $z=z(\vec{x})$ – решение уравнения (6.1).

<u>Пример 6.1.</u> Найти общее решение уравнения:

$$(x-z)\frac{\partial n}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial n}{\partial y}+2z\frac{\partial n}{\partial z}=0.$$

Решение. Соответствующая система ОДУ

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}.$$

Отсюда

$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{dz}{2z}\Rightarrow\frac{(x-y)^2}{z}=C_1;$$

$$\frac{d(x+y+2z)}{x+y+2z}=\frac{dz}{2z}\Rightarrow\frac{(x+y+2z)^2}{z}=C_2.$$

Ответ:

$$u=\Phi\left(\frac{(x-y)^2}{z};\ \frac{(x+y+2z)^2}{z}\right).$$

§ 7. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка

7.1. Характеристики и общее решение

Здесь рассмотрим более общее (чем (6.1)) уравнение:

$$a_1(\vec{x},z)\frac{\partial z}{\partial x_n}+\ldots+a_n(\vec{x},z)\frac{\partial z}{\partial x_n}=b(\vec{x},z), \qquad (7.1)$$

где $a_i(\vec{x},z)$, $b(\vec{x},z)\in C^1(G)$, $G\subseteq E^{n+1}_{\vec{x},z}$ – некоторая область, причем $a_1^2(\vec{x},z)+\ldots+a_n^2(\vec{x},z)>0$ в G. Уравнение (7.1) называется *квазилинейным* уравнением с частными производными первого порядка.

Определение 7.1. Система ОДУ

$$\frac{dx_1}{a_1(\vec{x},z)}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n(\vec{x},z)}=\frac{dz}{b(\vec{x},z)} \qquad (2)$$

называется *системой характеристик* уравнения (7.1), а каждая интегральная кривая системы (7.2) – *характеристикой* уравнения (7.1).

Определение 7.2. Поверхность $S\subset G$: $z=f(\vec{x})$, $x\in\Omega$, называется *состоящей из характеристик уравнения* (7.1), если через каждую точку S проходит характеристика, целиком лежащая на S в области G.

<u>Теорема 7.1.</u> Функция $z = f(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$ является решением уравнения (7.1) в Ω тогда и только тогда, когда поверхность S: $z = f(\vec{x})$, $x \in \Omega$, целиком состоит из характеристик уравнения (7.1).

<u>Доказательство.</u> Необходимость. Пусть $z = f(\vec{x})$ – решение (7.1), $x \in \Omega$. Рассмотрим повторяемость S: $f(\vec{x}) - z = 0$. Тогда вектор $\vec{N} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}; -1 \right\}$ – *нормаль к S*. Рассмотрим линию, проходящую через точку $M(\vec{x}, f(\vec{x}))$, целиком лежащую на S и удовлетворяющую системе уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1(\vec{x}, f(\vec{x}))} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(\vec{x}, f(\vec{x}))} = dt\ ,$$

т.е. рассмотрим линию:

$$\vec{x} = \vec{x}(t), z = f(\vec{x}(t)). \tag{7.3}$$

Покажем, что это характеристика уравнения (7.1). Так как $z = f(\vec{x})$ – решение (7.1), то

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \dot{x}_n \right) dt =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1(\vec{x}, f(\vec{x})) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n(\vec{x}, f(\vec{x})) \right] dt = b(\vec{x}, f(\vec{x}))\, dt,$$

т.е. $dz = b(\vec{x}, f(\vec{x}))\, dt$, таким образом функция $z = f(\vec{x})$ удовлетворяет вместе с $(x_1, \ldots, x_n)$ системе характеристик (7.2). Следовательно, кривая (7.3) является характеристикой уравнения (7.1).

Обратно, если S: $z = f(\vec{x})$, $x \in \Omega$, целиком состоит из характеристик, то $\vec{N} = \left\{ f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}; -1 \right\}$ и $\vec{e} = \{a_1, \ldots, a_n; b\}$ – соответственно нормаль к S и касательный вектор к характеристике $\Rightarrow \vec{N} \perp \vec{e} \Rightarrow$ выполнено уравнение (7.1).

Теорема 7.2 (общий вид решения). Рассмотрим уравнение (7.1) и систему (7.2). Пусть $\{\psi_k(\vec{x},z)\}_{k=1}^n - n$ независимых первых интегралов системы (7.2) в G, а функция $\Phi(y_1,\ldots,y_n)$ такова, что в некоторой точке $(\vec{x}_0,z_0)\in G \Rightarrow$

$$1)\ \Phi\left(\psi_1\left(\vec{x}_0,z_0\right),\ldots,\psi_n\left(\vec{x}_0,z_0\right)\right)=0;$$

$$2)\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\left(\psi_1\left(\vec{x}_0,z_0\right),\ldots,\psi_n\left(\vec{x}_0,z_0\right)\right)\neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности точки $(\vec{x}_0,z_0)$ уравнение

$$\Phi\left(\psi_1(\vec{x},z),\ldots,\psi_n(\vec{x},z)\right)=0$$

определяет общее решение $z=f(\vec{x})$ уравнения (7.1).

Пример 7.1. Решить уравнение $\sin^2 x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{tg} z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos^2 z$.

Решение. $$\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{dy}{\operatorname{tg} z}=\frac{dz}{\cos^2 z}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-\operatorname{ctg} z=\operatorname{tg} z+C_1;\\ y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z+C_2\end{cases}$$ – два независимых первых интеграла.

Ответ: $\Phi=\left(\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} z,\ y-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z\right)=0$.

7.2. Задача Коши

Здесь рассмотрим случай $n = 2$, т.е. уравнение

$$a_1(\vec{x},z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+a_2(\vec{x},z)\frac{\partial z}{\partial x_2}=b(\vec{x},z), \tag{7.4}$$

где $a_i(\vec{x},z)$, $b(\vec{x},z)\in C^1(G)$, $G\subseteq E^3_{\vec{x},z}$, и $a_1^2(\vec{x},z)+a_2^2(\vec{x},z)>0$ в G.

Пусть в G задана *гладкая кривая* L: $x_1=\psi_1(t)$, $x_2=\psi_2(t)$, $z=\psi_3(t)$, $\alpha\le t\le\beta$.

Поставим *следующую задачу*: найти поверхность $z = f(x_1, x_2)$, удовлетворяющую уравнению (7.4) и проходящую через заданную линию L. Эту задачу называют *задачей Коши* для уравнения (7.4).

Замечание. Если $z = f(x_1, x_2)$ – решение (7.4), проходящее через L, то по теореме 7.1 поверхность $S: z = f(x_1, x_2)$ целиком состоит из характеристик уравнения (7.4). Поэтому требуется через каждую точку $M \in L$ провести характеристику уравнения (7.4) и рассмотреть поверхность, образованную этими характеристиками.

Отметим, что если L является характеристикой, то такое построение возможно не всегда, а может оказаться не единственным.

Теорема 7.3. Рассмотрим уравнение (7.4) и указанную кривую L. Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}, z_0) \in L$, где $x_{10} = \psi_1(t_0)$, $x_{20} = \psi_2(t_0)$, $z_0 = \psi_3(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, и пусть

$$\begin{vmatrix} \psi_1'(t_0) & a_1(\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \psi_3(t_0)) \\ \psi_2'(t_0) & a_2(\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \psi_3(t_0)) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (7.5)$$

Тогда в некоторой окрестности точки M_0 существует единственное решение уравнения (7.4), проходящее через заданную кривую L.

Доказательство. Запишем уравнение характеристик

$$\frac{dx_1}{a_1(\vec{x}, z)} = \frac{dx_2}{a_2(\vec{x}, z)} = \frac{dz}{b(\vec{x}, z)} = ds. \qquad (7.6)$$

Пусть $M = M(t) = M(\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \psi_3(t)) \in L$ – точка линии L, отвечающая значению параметра t. Проведем через M решение системы (7.6), т.е. системы

$$\frac{dx_1}{ds} = a_1(\vec{x}, z), \quad \frac{dx_2}{ds} = a_2(\vec{x}, z), \quad \frac{dz}{ds} = b(\vec{x}, z)$$

с начальными условиями:

$$x_1(0, t) = \psi_1(t), \quad x_2(0, t) = \psi_2(t), \quad z(0, t) = \psi_3(t).$$

Такое решение при каждом $t \in (\alpha, \beta)$ существует, единственно и выходит на границу области G:

$$x_1 = x_1(s, t), \quad x_2 = x_2(s, t), \quad z = z(s, t).$$

Рассмотрим поверхность:

$$S=\{(x_1,x_2,z)\in G:\ x_1=x_1(s,t),\ \ x_2=x_2(s,t),\ z=z(s,t)\}.$$

Тогда:

а) $L\in S$ и, соответственно, $s=0$;

б) функции $x_1=(s,t)$, $x_2=(s,t)$, $z(s,t)$ непрерывно дифференцируемы по s (в силу системы (7.6)) и по t (в силу непрерывной дифференцируемости по начальным данным). В силу условия (7.5) в *некоторой окрестности точки* t_0 на L

$$0\neq\begin{vmatrix} a_1(\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t)) & \psi_1'(t) \\ a_2(\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t)) & \psi_2'(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial s} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial s} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t}\end{vmatrix}_L .$$

Тогда по теореме о неявной функции система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1=x_1(s,t); \\ x_2=x_2(s,t)\end{cases}$$

в некоторой окрестности точки $M_0(\psi_1(t_0),\ \varphi_2(t_0),\ \psi_3(t_0))$ имеет единственное решение $s=s(x_1,x_2)$, $t=t(x_1,x_2)$. Это решение непрерывно дифференцируемо. Но тогда в некоторой окрестности точки M_0 уравнение поверхности S имеет вид

$$S\!:\ z=z(S(x_1,x_2),\ t(x_1,x_2))=f(x_1,x_2).$$

По построению S состоит из характеристик. Следовательно, $z=f(x_1,x_2)$ – решение поставленной задачи Коши.

<u>Пример 7.2.</u> Решить задачу Коши

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2,$$

$$L:\ y=-2;\quad z=x-x^2.$$

<u>Решение.</u> $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z-x^2-y^2}\Rightarrow\begin{cases} y/x=C_1; \\ (z+x^2+y^2)/x=C_2.\end{cases}$

Имеем на L: $x=t$, $y=-2$, $z=t-t^2$. Тогда $C_1=-\dfrac{2}{t}$; $\dfrac{t-t^2+t^2+4}{t}=C_2 \Rightarrow$ $C_2=1-2C_1$. Таким образом, $\dfrac{z+x^2+y^2}{x}=$ $=1-2\dfrac{y}{x} \Rightarrow z=x-2y-x^2-y^2.$

<u>*Ответ:*</u> $z=x-2y-x^2-y^2.$

§ 8. Краевые задачи для ОДУ и функция Грина

<u>*8.1. Постановка задачи и функция Грина*</u>

<u>***Постановка задачи.***</u> На функциях $y\in C^2[a;b]$ рассматриваем дифференциальное выражение:

$$l(y)\equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y, \quad \text{где } p(x)>0 \text{ на } [a;b],$$

$$p(x)\in C^1[a;b];\ q(x)\ge 0 \text{ на } [a;b],\ q(x)\in C[a;b].$$

Для дифференциального выражения $l(y)$ рассматриваем *краевую задачу*: требуется найти $y\in C^2(a;b)\cap C^1[a;b]$, удовлетворяющую обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$l(y)=\lambda y(x)+f(x),\ x\in(a;b) \qquad (8.1)$$

и краевым условиям:

$$\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0, \quad \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0, \qquad (8.2)$$

где $f(x)\in C[a;b]$ заданная функция, $\lambda\in\mathbb{C}$ (или $\lambda\in\mathbb{R}$) − параметр, а α_i,β_i : $\alpha_i^{\,2}+\beta_i^{\,2}>0,\ i=1,2$ – заданные числа.

<u>***Замечание.***</u>

1. Если $\beta_1=\beta_2=0 \Rightarrow$ α_1 и $\alpha_2\ne 0$, то получаем *первую краевую задачу*; если $\alpha_1=\alpha_2=0$, то получаем *вторую краевую задачу.*

2. Наряду с задачей (8.1)–(8.2) рассматриваем также однородную задачу (8.1′)−(8.2), т.е.

$$l(y)=0, \qquad (8.1')$$

где (8.1′) определяется условиями $\lambda=0, f\equiv 0$.

Определение 8.1. Функцией Грина $G(x,\xi)$ задачи (8.1)−(8.2) называется заданная на $Q=[a;b]\times[a;b]$ функция, удовлетворяющая условиям:

1) $G(x,\xi)\in C(Q)$ – непрерывная на Q функция;

2) $\forall\xi\in(a;b)\Rightarrow$ на $[a,\xi)$ и на $(\xi;b]$ функция $G(x,\xi)$ имеет непрерывные производные первого порядка по переменной x и при этом выполняется условие «скачка» первой производной:

$$G_x'(x,x-0)-G_x'(x,x+0)=-1/p(x);$$

3) на $[a,\xi)$ и $(\xi;b]$ $G(x,\xi)$ удовлетворяет по x уравнению (8.1´);

4) по x функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет краевым условиям (8.2).

Теорема 8.1 (о существовании функции Грина). Если задача (8.1´)–(8.2) имеет только нулевое решение, то существует функция Грина $G(x,\xi)$ задачи (8.1)–(8.2).

Доказательство. Пусть $\{y_i(x)\}_{i=1}^2$ – фундаментальная система решений (ФСР) уравнения (8.1´).

Тогда $G(x,\xi)=\begin{cases} a_1(\xi)y_1(x)+a_2(\xi)y_2(x), & a\le x\le\xi;\\ b_1(\xi)y_1(x)+b_2(\xi)y_2(x), & \xi<x\le b.\end{cases}$

Из условия *непрерывности* $G(x,\xi)$ при $x=\xi$ получаем:

$$[a_1(x)y_1(x)+a_2(x)y_2(x)]-[b_1(x)y_1(x)+b_2(x)y_2(x)]=0,$$

а из условия «*скачка*»:

$$-[b_1(x)y'_1(x)+b_2(x)y'_2(x)]+[a_1(x)y'_1(x)+a_2(x)y'_2(x)]=1/p(x),$$

т.е. получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}(a_1-b_1)y_1(x)+(a_2-b_2)y_2(x)=0;\\ (a_1-b_1)y'_1(x)+(a_2-b_2)y'_2(x)=1/p(x).\end{cases} \tag{8.3}$$

Главный определитель Δ этой системы является определителем Вронского: $\Delta=W[y_1(x),y_2(x)]\ne0\quad\forall x\in[a;b]$, поэтому разности (a_i-b_i), $i=1,2$, однозначно вычисляется по формулам Крамера:

$$a_1(x)-b_1(x)=\frac{-y_2(x)}{p(x)W(x)},\quad a_2(x)-b_2(x)=\frac{y_1(x)}{p(x)W(x)}.$$

Теперь воспользуемся краевыми условиями:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1(\xi)y_1(a)+a_2(\xi)y_2(a))+\beta_1(a_1(\xi)y'_1(a)+a_2(\xi)y'_2(a)=0; \\ \alpha_2(b_1(\xi)y_1(b)+b_2(\xi)y_2(b))+\beta_2(b_1(\xi)y'_1(b)+b_2(\xi)y'_2(b))=0. \end{cases}.$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} a_1(\xi)(\alpha_1 y_1(a)+\beta_1 y'_1(a))+a_2(\xi)(\alpha_1 y_2(a)+\beta_1 y'_2(a))=0; \\ a_1(\xi)(\alpha_2 y_1(b)+\beta_2 y'_1(b))+a_2(\xi)(\alpha_2 y_2(b)+\beta_2 y'_2(b))= \\ =(a_1(\xi)-b_1(\xi))(\alpha_2 y_1(b)+\beta_2 y_1(b))+ \\ +(a_2(\xi)-b_2(\xi))(\alpha_2 y'_2(b)+\beta_2 y'_2(b)) \end{cases} \tag{8.4}$$

и рассмотрим главный определитель этой системы:

$$\Delta=\det\begin{pmatrix} \alpha_1 y_1(a)+\beta_1 y'_1(a) & \alpha_1 y_2(a)+\beta_1 y'_2(a) \\ \alpha_2 y_1(b)+\beta_2 y'_1(b) & \alpha_2 y_2(b)+\beta_2 y'_2(b) \end{pmatrix}.$$

Если $\Delta=0$, то столбцы определителя пропорциональны, и, следовательно, существуют постоянные C_1, C_2 ($C_1^2+C_2^2\neq 0$), такие, что:

$$\begin{cases} \alpha_1(C_1 y_1(a)+C_2 y_2(a))+\beta_1(C_1 y'_1(a)+C_2 y'_2(a))=0; \\ \alpha_2(C_1 y_1(b)+C_2 y_2(b))+\beta_2(C_1 y'_1(b)+C_2 y'_2(b))=0. \end{cases}.$$

Рассмотрим $y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)$. Тогда $y(x)$ − решение однородной задачи (8.1′)–(8.2). По условию получаем $y(x)\equiv 0$; это противоречит тому, что $\{y_i(x)\}_{i=1}^2$ – ФСР для уравнения (8.1′). Противоречие показывает, что столбцы не пропорциональны и $\Delta\neq 0$. Но тогда из (8.4) однозначно находим $a_i(\xi)$, $i=1,\ 2$, и по известным разностям (a_i-b_i), $i=1,\ 2$, находим все компоненты $a_i(\xi),\ b_i(\xi)$, $i=1,2$, а с ними находим *однозначно* функцию Грина. Тем самым теорема доказана.

Замечание. Указанное определение и построение функции $G(x,\xi)$ сохраняются и для более общих операторов и краевых условий.

Теорема 8.2 (Гильберта). Если задача (8.1′)–(8.2) имеет только нулевое решение, то задача (8.1)–(8.2) при $\lambda=0$ однозначно разрешима для $\forall f(x)\in C[a;b]$ и это решение задается формулой

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi\,, \tag{8.5}$$

Если же $\lambda \neq 0$, то задача (8.1)–(8.2) эквивалентна интегральному уравнению:

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi+F(x)\,, \tag{8.6}$$

где $F(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$.

Доказательство. 1. Пусть $\lambda=0$. Рассмотрим $y(x)$, определяемую равенством (8.5), и покажем, что это – решение задачи (8.1)–(8.2).

Отметим сразу, что так как $G(x,\xi)\in C(Q)$, а $G'_x(x,\xi)$ непрерывна на $[a,\xi)$ и на $(\xi;b]$, то, следовательно, по теореме о непрерывности интеграла по параметру получаем, что $y(x)$ удовлетворяет краевым условиям (8.2). Далее $\forall x\in(a;b)$ справедливы равенства

$$y(x)=\int_a^x G(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi;$$

$$\begin{gathered}y'(x)=\int_a^x G'_x(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G'_x(x,\xi)f(\xi)d\xi+\\ +(G(x,x-0)-G(x,x+0))f(x)=\\ =\int_a^x G'_x(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G'_x(x,\xi)f(\xi)d\xi\,;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}y''(x)=\int_a^x G''_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G''_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi+\\ +(G'_x(x,x-0)-G'_x(x,x+0))f(x).\end{gathered}$$

Умножая $y''(x)$ на $(-p(x))$, $y'(x)$ на $(-p'(x))$, $y(x)$ на $q(x)$ и пользуясь условием скачка, получаем:

$l(y)=\int_a^b l_x(G(x,\xi))f(\xi)d\xi+f(x)$, а так как $l_x(G(x,\xi))=0,\ (x\neq\xi)$,

то $l(y)=f(x)$ на $[a+\varepsilon;b-\varepsilon]\Rightarrow(a;b)$.

2. Теперь, переобозначив $\lambda y(x)+f(x)\leftrightarrow f(x)$ и применив доказанное в п. 1, получаем уравнение (8.6). Обратно проделывая выкладки с равенством (8.6), получаем, что (8.6) эквивалентно задаче (8.1)–(8.2).

Упражнение. Построив функцию Грина, записать решение задачи:

$$\begin{cases} y''(x)=f(x); \\ y(0)=0,\ y(0)+y'(1)=0. \end{cases}$$

8.2. Задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим задачу (8.1)−(8.2) с $f(x)\equiv 0$ на $[a;b]$, т.е. задачу:

$$\begin{cases} l(y)=-(p(x)y'(x))'+q(x)y(x)=\lambda y(x); & (8.1'') \\ \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0,\ \ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0. & (8.2) \end{cases}$$

Определение 8.2. Задача: найти все такие $\lambda\in C$, при которых задача (8.1")−(8.2) имеет нетривиальные решения, называется *задачей Штурма–Лиувилля.*

Теорема 8.3 (об эквивалентности). Если задача (8.1′)–(8.2) *имеет только нулевое решение*, то задача Штурма–Лиувилля (8.1′′)–(8.2) эквивалентна *интегральному уравнению с непрерывным ядром* $G(x,\xi)$:

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi\,, \tag{8.5}$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина задачи (8.1)–(8.2).

Доказательство. Доказательство буквально уже получено в теореме Гильберта.

Теорема 8.4 (о симметричности функции Грина). Для задачи (8.1)−(8.2) $G(x,\xi)=G(\xi,x)$.

Доказательство. $G(x,\xi)-$ ядро *обратного* оператора к оператору задачи (8.1)−(8.2). Поэтому достаточно проверить, что оператор задачи (8.1)−(8.2) является симметричным. Для любых функций $y(x)$ и $z(x)$, таких, что $y(x),z(x)\in C^2(a;b)\cap C^1[a;b]$ и удовлетворяющим условиям (8.2), выполняется:

$$\int_a^b [-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)]z(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}[-(p(x)y'(x))'z(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q(x)y(x)z(x)dx\right] =$$

$$= -p(x)[y'(x)z(x) - z'(x)y(x)]\Big|_a^b +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} y(x)[-(p(x)z'(x))' + q(x)z(x)dx\right].$$

Проверим, что $y'(b)z(b) - z'(b)y(b) = 0$ (и, аналогично, при $x = a$). Это следует из краевых условий:

$$\begin{cases} \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0; \\ \alpha_2 z(b) + \beta_2 z'(b) = 0 \end{cases}$$

при $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$, следовательно, определитель системы равен нулю:

$$\det\begin{pmatrix} y(b) & y'(b) \\ z(b) & z'(b) \end{pmatrix} = 0,$$

что и требуется.

Таким образом, оператор задачи (8.1)–(8.2) *симметричен*, а так как $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$, то и обратный оператор симметричен, а тогда и его ядро также *симметричная функция*.

<u>Теорема 8.5 (о собственных значения и собственных функциях задачи Штурма–Лиувилля).</u> 1. Множество собственных значений задачи (8.1)–(8.2) не пусто, не более, чем счетно, не имеет конечных предельных точек. Собственные числа вещественны. Собственные числа – простые. 2. Собственные функции задачи (8.1)–(8.2) ортогональны.

<u>Доказательство.</u> Все свойства, кроме простоты, собственных чисел следуют из общих свойств интегрального оператора с непрерывным симметричным ядром. Докажем простоту собственных чисел. Если λ − собственное число и $y_1(x), y_2(x)$ − две, отвечающие этому λ, собственные функции, то

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0; \\ \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{при} \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0.$$

Отсюда определитель Вронского $W[y_1(a), y_2(a)] = 0$, следовательно, $y_1(x), y_2(x)$ − зависимые функции на $[a;b]$, т.е. λ − простое собственное число.

<u>Теорема 8.6 (Стеклова).</u> Пусть $F(x) \in C^2(a;b) \cap C^1[a;b]$ и удовлетворяет условиям (8.2). Тогда $F(x)$ раскладывается в равномерно и абсолютно сходящийся на $[a;b]$ ряд по собственным функциям задачи (8.1)–(8.2).

<u>Доказательство.</u> Пусть $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – максимальная ортонормированная система (ОНС) собственных функций задачи (8.1)–(8.2), отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, и $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $F(x)$ является решением задачи (8.1)–(8.2) с $f(x) = l(F), \ l(x) \in C[a;b]$. Из теоремы Гильберта следует:

$$F(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi,$$

т.е. $F(x)$ – истокообразно представима через непрерывное, симметричное ядро $G(x,\xi)$. Но тогда по теореме Гильберта ряд

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (F, y_k) y_k(x)$$

сходится равномерно и абсолютно на $[a;b]$.

<u>Теорема 8.7.</u> Рассмотрим условие (8.2) вида:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) - \beta_1 y'(a) = 0; \\ \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \end{cases} \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0, \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0. \qquad (8.2^*)$$

Тогда задача (8.1′)–(8.2*) имеет только тривиальное решение, за исключением случая $q(x) \equiv 0; \ \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

<u>Доказательство.</u> Если $y(x) \in C^2(a;b) \cap C^1[a;b]$ − решение задачи (8.1′)–(8.2*), то

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} [-(p(x) y'(x))' + q(x) y(x)] y(x) dx \right] =$$

$$= \int_a^b [(p(x)(y'(x)^2) + q(x) y^2(x)] dx - p(x) y'(x) y(x) \Big|_a^b.$$

Из (8.2*) следует, что $p(a) y(a) y'(a) - p(b) y(b) y'(b) \geq 0$. Следовательно, $y(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in [a;b]$. Теорема доказана.

II. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 9. Линейные нормированные пространства

9.1. Основные определения

Определение 9.1. Пусть X – некоторое линейное пространство над полем K (здесь, как правило, $K = R$; иногда $K = C$) и пусть $\forall f \in X$ поставлено в соответствие действительное число $\|f\|$, удовлетворяющее свойствам:

1) $\forall f \in X \Rightarrow \|f\| \geq 0$, причем $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = \theta$ в X;

2) $\forall \alpha \in K \Rightarrow \|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$;

3) $\forall f,\ g \in X \Rightarrow \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (неравенство треугольника).

Тогда это число $\|f\|$ называется *нормой элемента f* в X, а пространство X с этой нормой – *нормированным пространством*; обозначение $(X,\ \|\cdot\|)$.

Примеры.

9.1. $X = \{$множество функций, непрерывных на $[a,\ b]\}$, $\forall f \in X \Rightarrow \|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Тогда $(X,\ \|\cdot\|) = C[a;b]$ – нормированное пространство.

9.2. $C^k[a,b] = \Big\{ f:\ \forall 0 \leq n \leq k \Rightarrow \exists f^{(n)}(x) \in C[a,b];$

$$\|f\|_{C^k[a,b]} = \max_{1 \leq n \leq k} \left\| f^{(k)} \right\|_{C^k[a,b]} \Big\}.$$

9.3. $C^n(G)$, где G – некоторое подмножество (открытое) в R^m, – это пространство функций, имеющих на G непрерывные производные $D^\alpha f$ с $|\alpha| \leq n$ и $\|f\|_{C^n[G]} = \max\limits_{0 < |\alpha| \leq n} \sup\limits_{x \in G} \left| D^\alpha f(x) \right|$.

Определение 9.2. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X, \|\cdot\|)$ называется: 1) *фундаментальной* в X, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon)$:

$$\forall n,\ m > N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon;$$

2) *сходящейся к* $f \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon):$

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon \text{. Обозначение } f \overset{X}{=} \lim_{n\to\infty} f_n .$$

Очевидно, что:

1) если $f_n \to f$ в X, то $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена* в X, т.е. $\exists M:\ \forall n \Rightarrow \|f_n\| < M$;

2) если $\exists \overset{X}{\lim_{n\to\infty}} f_n = f$, то он – *единственный*.

Определение 9.3. Нормированное пространство $(X,\ \|\cdot\|)$ называется *полным*, если любая фундаментальная в X $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел $f \in X$.

Определение 9.4. Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

Утверждение 9.1. Пространства $C[a,b]$, $C^k[a,b]$ – банаховы пространства.

Упражнение. Провести доказательство утверждения 9.1.

9.2. Евклидовы пространства

Определение 9.5. Линейное пространство X называется *евклидовым* (над полем $K = C$), если каждой паре $f,\ g \in X$ поставлено в соответствие число $(f,g) \in C$, удовлетворяющее условиям:

1) $\forall f \in X \Rightarrow (f,f) \ge 0$, причем $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = \theta$ в X;

2) $(f,g) = \left(\overline{g,f}\right)$;

3) $\forall \alpha, \beta \in C \Rightarrow \left(\alpha f_1 + \beta f_2, g\right) = \alpha\left(f_1, g\right) + \beta\left(f_2, g\right)$.

Утверждение 9.2. Всякое евклидово пространство является нормированным с нормой

$$\|f\| = (f,f)^{1/2}.$$

Доказательство. 1. Очевидно, что $\|f\| \overset{\text{def.}}{=} (f,f)^{1/2}$ удовлетворяет первым двум аксиомам нормы.

2. Докажем неравенство Коши–Буняковского–Шварца

$$|(f,g)| \le (f,f)^{1/2}(g,g)^{1/2} = \|f\| \cdot \|g\|.$$

Выберем угол φ так, чтобы $(f,g) = |(f,g)|\mathrm{e}^{i\varphi}$, и рассмотрим $\lambda = t\mathrm{e}^{i\varphi}$, где $t \in R$. Тогда:

$$0 \le (f+\lambda g, f+\lambda g) = \|f\|^2 + \lambda(g,f) + \overline{\lambda}(f,g) + \lambda\overline{\lambda}\|g\|^2 =$$
$$= \|f\|^2 + 2t|(f,g)| + t^2\|g\|^2.$$

Но тогда $D/4 = |(f,g)|^2 - \|f\|^2 \cdot \|g\|^2 \le 0$, т.е. получили нужное неравенство: $|(f,g)| \le \|f\| \cdot \|g\|$.

3. Теперь установим выполнение неравенства треугольника. Имеем:

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = \|f\|^2 + (f,g) + \left(\overline{f,g}\right) + \|g\|^2 =$$
$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) \le \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|(f,g)| \le$$
$$\le \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2.$$

Отсюда $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ и таким образом выполнено и третья аксиома нормы.

Утверждение 9.3.

1. Скалярное произведение – непрерывная в $X \times X$ функция.
2. Скалярное произведение – счетно-аддитивная функция.

Доказательство. 1. Если $f_n \to f$, $g_m \to g$ в X, то

$$|(f_n, g_m) - (f,g)| = |(f_n - f, g_m) + (f, g_m - g)| \le$$
$$\le |(f_n - f; g_m)| + |(f, g_m - g)| \le \|f_n - f\| \cdot \|g_m\| +$$
$$+ \|f\|\|g_m - g\| \to 0 \text{ при } m,n \to +\infty.$$

3. Если $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$, т.е. $\left\|g - \sum_{k=1}^{n} g_k\right\| \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f, g_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(f, g_k) = \lim_{n\to\infty}\left(f, \sum_{k=1}^{n} g_k\right),$$

откуда

$$\left|(f,g)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(f,g_k\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(f,g-\sum_{k=1}^{n}g_k\right)\right|\le$$

$$\le\|f\|\cdot\lim_{n\to\infty}\left\|g-\sum_{k=1}^{n}g_k\right\|=0.$$

Таким образом,

$$\left(f,\sum_{k=1}^{\infty}g_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(f,g_k\right).$$

Определение 9.6. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством*. Обозначаем далее буквой E.

Примеры.

9.4. $CL_2[a,b]=\left\{f\in C[a,b],\text{ с нормой } \|f\|_{CL_2}=\left(\int_a^b|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\right\}.$

Норма в $CL_2[a,b]$ порождается скалярным произведением

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

9.5. $l^2=\left\{x:x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\right):\|x\|_{l^2}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^2\right)^{1/2}\right\}.$

Скалярное произведение в l_2 определяется равенством:

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\,\overline{y}_k.$$

Утверждение 9.4. Пространство $CL_2[a,b]$ не является полным. Пространство l_2 – полное евклидово (гильбертово).

Упражнение. Провести доказательство утверждения 9.4.

§ 10. Ряды Фурье по ортогональным системам в евклидовых пространствах

10.1. Основные определения

Определение 10.1. Система элементов $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subset X$ называется *линейно независимой в X*, если $\forall f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots, f_{\alpha_m}$ равенство $C_1 f_{\alpha_1} + \ldots + C_m f_{\alpha_m} = \theta$ возможно тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 0$.

Определение 10.2. Система элементов $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ называется:

1) *всюду плотной* в X, если

$$\forall(\varepsilon > 0, f \in X) \Rightarrow \exists f_\alpha \in \{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} : \|f_\alpha - f\| < \varepsilon;$$

2) *линейно плотной в X*, если $\forall(f \in X,\ \varepsilon > 0) \Rightarrow \exists\Big(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_m};$ $C_1, \ldots, C_m\Big)$: $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{m} C_k d_{\alpha_k} \right\| < \varepsilon$ (т.е. в X всюду плотная оболочка, натянутая на $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$).

Определение 10.3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k f_k$ называется *сходящимся в X к f*, если $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} C_k f_k \right\| \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае f – *сумма* ряда.

Определение 10.4. Система (не более чем *счетная*) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *базисом* в X, если $\forall f \in X \Rightarrow f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k e_k$ и это представление единственно.

Определение 10.5. Система $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ называется *ортогональной* (ОС) в евклидовом пространстве E, если $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}\right) = 0$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и *ортонормированной* (ОНС), если $\left(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}\right) = \delta_{\alpha_1 \alpha_2}$.

Определение 10.6. Базис $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ в E называется *ортонормированным базисом* (ОНБ), если $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – базис и ОНС.

Определение 10.7. Пусть $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в E. Для $\forall f \in E$ положим $\alpha_k = \left(f, e_k\right)$ и поставим в соответствие элементу $f \in E$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(f, e_k\right) e_k .$$

Тогда – это *ряд Фурье* функции f по ОНС $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left(f, e_k\right)$ – *коэффициенты Фурье*.

Утверждение 10.1 (единственность ряда по ОНС). Если $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС и $f \overset{E}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, то $c_k = \left(f, e_k\right)$, т.е. этот ряд – ряд Фурье функции f по ОНС $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Используя единственность скалярного произведения, получаем

$$\forall f \Rightarrow (f, e_k) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (c_i e_i), e_k \right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (e_i, e_m) = c_k .$$

10.2. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя

Теорема 10.1 (минимальное свойство коэффициентов Фурье). Если $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в E, $f \in E$, то

$$\min_{\beta} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|,$$

где $\alpha_k = (f, e_k)$, а минимум слева берется по всевозможным наборам $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Доказательство. Распишем квадрат нормы:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k, f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right) =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overline{(f, e_k)} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\beta}_k (f, e_k) =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \overline{\beta}_k + \overline{\alpha}_k \beta_k \right) =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k - \alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2,$$

так как $|\beta_k - \alpha_k|^2 = (\overline{\beta}_k - \overline{\alpha}_k)(\beta_k - \alpha_k) = |\beta_k|^2 + |\alpha_k|^2 - \overline{\beta}_k \alpha_k - \beta_k \overline{\alpha}_k$.
Отсюда

$$\inf_{\overline{\beta}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \qquad (10.1)$$

и инфимум достигается при $\beta_k = \alpha_k = (f, e_k)$.

Следствие (неравенство Бесселя). Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в E, то

$$\forall f \in E \Rightarrow \ \exists \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \le \|f\|^2.$$

Замечание. Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такая ОНС, что $\forall f \in E \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \|f\|^2$, то это называют *равенством Парсеваля*.

10.3. Критерий базисности ОНС в Е

Теорема 10 2. Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в E, то следующие условия равносильны.

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНБ в E.

2. $\forall f \in E \Rightarrow \ \|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2$, т.е. справедливо равенство Парсеваля.

3. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – линейно плотная в E система.

4. $\forall \left(f \in E: \ (f, e_k) = 0 \text{ для всех } k = 1, 2, \ldots \right) \Rightarrow f = \theta$.

Доказательство. Проведем по схеме: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

$1 \to 2$. Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНБ в E, то $\forall f \in E \Rightarrow f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$, а тогда

$$\|f\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k, \ \sum_{m=1}^{\infty} (f, e_m) e_m \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) \left(e_k, \ \sum_{m=1}^{\infty} (f, e_m) e_m \right) = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 .$$

$2 \to 3$. Пусть $c_k = (f, e_k)$. Тогда

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \to 0 ,$$

так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится. Таким образом, в E линейно плотна система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

$3 \to 4$. По условию: $\forall (\varepsilon > 0, f \in E) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \left(c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}; e_{k_1}, \ldots, e_{k_n} \right) \ : \left\| f - \sum_{p=1}^{n} c_{k_p} e_{k_p} \right\|^2 < \varepsilon .$$

Пусть $N = k_n$, дополним $c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}$ до $c_1, \ldots, c_N$ нулями и получим:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k \right\| < \varepsilon .$$

Но тогда по минимальному свойству коэффициентов Фурье и подавно

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, e_k) e_k \right\| < \varepsilon .$$

Отсюда, если $\forall k \Rightarrow (f, e_k) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|f\| < \varepsilon$, т.е. $\|f\| = 0 \Rightarrow f = \theta$.

$4 \to 1$. Пусть $f \in E$ – любой элемент. Положим $g = f - \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$. Тогда, используя счетную аддитивность скалярного произведения, имеем: $\forall m \Rightarrow (g, e_m) = (f, e_m) - \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)(e_k, e_m) = (f, e_m) - (f, e_m) = 0$. Отсюда по условию $g = \theta$, т.е. $\forall f \in E \Rightarrow f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$. Так как $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС, то это разложение единственно. Следовательно, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНБ.

Замечание. Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОС, но не нормированная, то $\left\{ \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|} \right\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС и, следовательно, ряд Фурье функции $f \in E$ по ОС $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет вид $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (f, \varphi_k) \varphi_k$.

§ 11. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах

11.1. Основные определения и свойства

Определение 11.1. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – два нормированных пространства. Отображение $\hat{A}$ множества $D(\hat{A}) \subseteq X$ в Y, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in D(\hat{A})$ единственный элемент $\hat{A}(x) = y \in Y$, называется *оператором* с областью определения $D(\hat{A}) \subseteq X$ и множеством значений $E(\hat{A}) \subseteq Y$.

<u>Определение 11.2</u>. Оператор $\hat{A} : X \to Y$ называется *ограниченным*, если:

1) $D(\hat{A}) = X$;

2) $\exists C > 0 :\ \forall x \in X \Rightarrow \left\| \hat{A}(x) \right\|_Y \le C \|x\|_X$.

<u>Определение 11.3.</u> Если $\hat{A} : X \to Y$ – ограниченный оператор, то число

$$\left\| \hat{A} \right\|_{X \to Y} = \sup_{X \neq \theta} \frac{\left\| \hat{A}(x) \right\|_Y}{\|x\|_X}$$

называется *нормой* оператора *A*.

<u>Определение 11.4.</u> Оператор $\hat{A} : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in D(\hat{A})$, если

$$\forall \left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} :\ \|x_n - x_0\|_X \to 0 \right) \Rightarrow \left\| \hat{A}(x_n) - \hat{A}(x_0) \right\|_Y \to 0,\quad n \to \infty .$$

Оператор, непрерывный в каждой точке множества $M \subseteq D(\hat{A})$, называется *непрерывным на M.*

<u>Определение 11.5.</u> Оператор $\hat{A} : X \to Y$ называется *линейным*, если:

1) $D(\hat{A}) \subseteq X$ – линейное подпространство в *X*;

2) $\forall x_1, x_2 \in D(\hat{A}),\ \forall C_1, C_2 \in K \Rightarrow \hat{A}(C_1 x_1 + C_2 x_2) = c_1 \hat{A} x_1 + c_2 \hat{A} x_2$.

<u>Замечание.</u> Если $\hat{A}$ – линейный оператор, то обычно пишут $\hat{A}(x) = \hat{A}x$.

<u>Утверждение 11.1.</u> Если $\hat{A} : X \to Y$ − *линейный*, $D(\hat{A}) = X$, то он *ограничен* тогда и только тогда, когда он *непрерывен на X.*

Доказательство. 1. Если *A* линеен и ограничен, то

$$\forall\left(\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subset X:\ \left\|x_n-x_0\right\|_X\to 0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\|\hat{A}x_n-\hat{A}x_0\right\|_X=\left\|\hat{A}\left(x_n-x_0\right)\right\|_Y\le C\left\|x_n-x_0\right\|_X\to 0,$$

т.е. он непрерывен в любой точке $x_0\in X$.

2. Допустим, что *A* линеен и непрерывен на *X*, но *не ограничен*:

$$\forall n\Rightarrow\exists x_n\in X:\ x_n\ne\theta\ \text{ и }\ \left\|\hat{A}x_n\right\|_Y\ge n\left\|x_n\right\|_X.$$

Отсюда $\left\|\hat{A}\dfrac{x_n}{n\left\|x_n\right\|_X}\right\|_Y\ge 1$. С другой стороны, так как $\left\|\dfrac{x_n}{n\left\|x_n\right\|_X}-\theta\right\|_X=\dfrac{1}{n}\to 0$, а $\hat{A}\theta_x=\theta_y$, то $\left\|\hat{A}\dfrac{x_n}{n\left\|x_n\right\|_X}-\hat{A}\theta\right\|_Y\to 0$ в силу непрерывности $\hat{A}$ в точке θ. Пришли к противоречию, которое доказывает, что оператор $\hat{A}$ ограничен.

Определение 11.6. Множество $M\subset X$ называется *относительно компактным* в *X*, если $\forall\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subseteq M\Rightarrow$ из $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить фундаментальную по норме *X* последовательность.

Далее рассматриваем *линейные* операторы.

Определение 11.7. Оператор $\hat{A}:X\to Y$ называется *вполне непрерывным* (или *компактным*), если $D\left(\hat{A}\right)=X$ и он переводит всякое ограниченное в *X* множество в множество, относительно компактное в *X*.

Утверждение 11.2. Если оператор $\hat{A}$ вполне непрерывен, то он ограничен. *Обратное неверно.*

Доказательство. 1. Сначала докажем, что всякое относительно компактное в *Y* множество *N* ограничено в *Y*. Допустим противное. Тогда берем $y_1\in N\Rightarrow$

$$\exists y_2\in N:\ \left\|y_2-y_1\right\|_Y\ge 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists y_3 \in N: \ \|y_3 - y_1\|_Y \geq 1, \ \|y_3 - y_2\|_Y \geq 1 \Rightarrow$$

$$. \ . \ . \ ,$$

$$\Rightarrow \exists y_n \in N: \ \|y_n - y_1\|_Y \geq 1, \dots, \|y_n - y_{n-1}\|_Y \geq 1 \ \text{ и т.д.}$$

Таким образом, построена последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$, из которой *нельзя выделить* сходящуюся подпоследовательность. Но это противоречит относительной компактности *N*.

Если теперь $K_1 = \{x \in X: \ \|x\|_X \leq 1\}$ – единичный шар в *X*, то $\hat{A}K_1 = N \subset Y$ – относительно компактное, а значит, и ограниченное, в *Y* множество. Но тогда:

$$\exists C > 0: \ \forall x \in K_1 \Rightarrow \left\|\hat{A}x\right\|_Y \leq C \ \text{, т.е. } \forall x \in X \text{ ,}$$

$$\left\|\hat{A}x\right\|_Y \leq C\|x\| \quad \Rightarrow \ \hat{A} \text{ ограничен.}$$

2. Пусть $X = Y, \ \hat{A} = \hat{I}$ – тождественный оператор. Тогда $\hat{I}$ очевидно ограничен, но не компактен.

11.2. Основные примеры

Пусть $G \subseteq R^n$ – некоторое множество и $D\left(\hat{K}\right)$ – множество всех функций *f*, определенных на *G*, для которых при $\forall t \in G$ существует (хотя бы как несобственный) интеграл:

$$\left(\hat{K} f\right)(t) = \int\limits_G K(t, \tau) f(\tau) d\tau . \tag{11.1}$$

Тогда на $D\left(\hat{K}\right)$ задан *оператор Фредгольма с ядром* $\hat{K}(t, \tau)$.

Аналогично, если для $\forall f \in D\left(\hat{K}\right)$ и любого $t \in [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, определен оператор

$$\left(\hat{k} f\right)(t) = \int\limits_a^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau , \tag{11.2}$$

то на множестве $D\left(\hat{k}\right)$ задан оператор *Вольтерра* $\hat{k}$ *с ядром* $k(t, \tau)$.

<u>Утверждение 11.3.</u> Пусть G – ограниченное, измеримое множество ($[a,b]$ – отрезок), ядро $K(t,\tau)\in C\left(\overline{G}\times\overline{G}\right)$ $(k(t,\tau)\in C([a,b]\times[a,b]))$, то операторы $\hat{K}$ и $\hat{k}$ являются *линейными*, *ограниченными* операторами в пространствах $C(G)$ и $C[a,b]$ соответственно.

<u>Доказательство.</u> Линейность операторов очевидна. То, что $\forall f\in C(G)$ $(\forall f\in C[a,b])\Rightarrow \hat{K}f\in C(G)$ $\left(\hat{k}f\in C[a,b]\right)$, следует из теоремы о непрерывности собственного интеграла по параметру. Наконец, ограниченность операторов (11.1) и (11.2) в этом случае следует из оценок:

$$\left\|\hat{K}f\right\|_{C(G)}=\sup_{t\in G}\left|\int_G K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau\right|\le$$

$$\le\sup_{t,\tau\in G}|K(t,\tau)|\cdot\sup_{\tau\in G}|f(\tau)|\mu(G)=C\|f\|_{C(G)},$$

$$\left\|\hat{k}f\right\|_{C[a,b]}\le\sup_{t,\tau\in[a,b]}|k(t,\tau)|\sup_{\tau\in[a,b]}|f(\tau)|(b-a)=C\|f\|_{C[a,b]}.$$

Напомним следующую теорему.

<u>Теорема Арцела.</u> Множество M относительно компактно в $C(G)$ *тогда и только тогда*, когда:

1) множество M *равномерно ограничено в* $C(G)$, т.е. $\exists C>0$: $\forall f\in M\Rightarrow\|f\|_{C(G)}\le C$;

2) множество M *равностепенно непрерывно в* $C(G)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\Rightarrow\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall\left(t_1,t_2\in G:\rho\left(t_1,t_2\right)<\delta\right)\Rightarrow\sup_{f\in M}\left|f\left(t_1\right)-f\left(t_2\right)\right|<\varepsilon.$

<u>Упражнение.</u> Провести доказательство достаточности в теореме Арцелла.

<u>Утверждение 11.4.</u> Операторы $\hat{K}$, $\hat{k}$ являются вполне непрерывными операторами в $C(G)$ и $C[a,b]$ соответственно, при выполнении требований утверждения 3.

<u>Доказательство.</u> Проведем доказательство для оператора $\hat{K}$. Пусть $X\subset C(G)$ – любое ограниченное множество, т.е. $\exists C_0>0$: $\forall f\in X\Rightarrow\|f\|_{C(G)}\le C_0$.

Обозначим $M=\hat{K}X$ и докажем, что M – относительно компактное в $C(G)$ множество.

Воспользуемся теоремой Арцела. Имеем:

а) $\forall g=\hat{K}f\in M\Rightarrow$

$$\|g\|_{C(G)}=\left\|\hat{K}f\right\|_{C(G)}\le\sup_{t,\tau\in\overline{G}}|K(t,\tau)|\|f\|_{C(G)}\cdot\mu(G)\le$$

$$\le C_0\mu(G)\sup_{t,\tau\in\overline{G}}|K(t,\tau)|=C,$$

т.е. M – равномерно ограничено;

б) $$\sup_{g\in M}\left|g(t_1)-g(t_2)\right|=\sup_{f\in X}\left|\left(\hat{K}f\right)(t_1)-\left(\hat{K}f\right)(t_2)\right|\le$$

$$\le\sup_{f\in X}\int_G\left|K(t_1,\tau)-K(t_2,\tau)\right|\left|f(\tau)\right|d\tau.$$

Так как $K(t,\tau)$ равномерно непрерывная на $\overline{G}\times\overline{G}$ функция, то

$$\forall\varepsilon>0\ \Rightarrow\exists\delta(\varepsilon>0):\ \forall\left((t_1,\tau),(t_2,\tau):\rho(t_1;t_2)<\delta\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|K(t_1,\tau)-K(t_2,\tau)\right|<\ \varepsilon/c_0\mu(G).$$

Фиксируем $\varepsilon>0$, выбираем $\delta(\varepsilon)>0$. Тогда $\forall\left(t_1,t_2\in G:\right.$ $\left.\rho(t_1,t_2)<\delta\right)\Rightarrow\sup\limits_{g\in M}\left|g(t_1)-g(t_2)\right|<\varepsilon$, т.е. множество M равностепенно непрерывно. По теореме Арцела получаем, что M относительно компактно, а тогда $\hat{K}$ вполне непрерывен в $C\left(\overline{G}\right)$.

<u>*Упражнение.*</u> Провести доказательство утверждения 2 для оператора $\hat{k}$.

<u>***11.3. Интегральный оператор с полярным ядром***</u>

<u>***Определение 11.8.***</u> Ядро $K_\alpha(t,\tau)=\dfrac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}$, где $K(t,\tau)=C\left(\overline{G}\right)\times$ $\times C\left(\overline{G}\right)$, а $0<\alpha<n$, называется *полярным ядром*. Здесь, как и ранее, $G\subseteq R^n$, а $|t-\tau|=\rho(t,\tau)$.

Далее рассмотрим оператор

$$\left(\hat{K}_\alpha f\right)(t)=\int\limits_G K_\alpha(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau\,. \qquad (11.3)$$

Утверждение 11.5. Если G – измеримое, ограниченное множество, то $\hat{K}_\alpha$ – линейный, вполне непрерывный оператор в $C(G)$.

Доказательство. 1. Пусть X – любое ограниченное в $C(G)$ множество, т.е. $\exists C_0>0:\ \forall f\in X\Rightarrow\ \|f\|_{C(G)}\le C_0$. Тогда:

$$\sup_{f\in X}\sup_{t\in G}\left|\left(\hat{K}_\alpha f\right)(t)\right|\le\sup_{f\in X}\|f\|_{C(G)}\cdot\sup_{(t,\tau)\in\overline{G}}K(t,\tau)\cdot\sup_{t\in G}\int\limits_G\frac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha}\le$$

$\le C_1\sup\limits_{t\in G}\int\limits_{K_{R_0}(t)}\dfrac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha}=$ {*в сферических координатах* $\tau=t+\eta\rho$, *где*

$\eta=\left(\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n\right)$ – *единичная нормаль к сфере* $S_{R_0}(t)$ }=

$$=C_1\mu\left(S_1\right)\int\limits_0^{R_0}\frac{\rho^{n-1}}{\rho^\alpha}d_\rho=C_2<+\infty\,.$$

Здесь $K_{R_0}(t)$ – шар радиусом R_0 с центром в точке t, а R_0 выбрано так, чтобы $\overline{G}\subset K_{R_0}(t)$ при любом $t\in G$; $\mu\left(S_1\right)$ – площадь единичной сферы в R^n. Таким образом, множество $\hat{K}_\alpha X$ *равномерно ограничено* в $C(G)$.

2. Докажем равностепенную непрерывность $\hat{K}_\alpha X$ (и тем самым непрерывность любой функции $\left(\hat{K}_\alpha f\right)(t)$ в любой точке $t\in G$).

Имеем:

$$\forall\left(t_1,t_2\in G:\ \left|t_1-t_2\right|<\delta\right)\Rightarrow\sup_{f\in X}\left|\left(\hat{K}_\alpha f\right)\left(t_1\right)-\left(\hat{K}_\alpha f\right)\left(t_2\right)\right|\le$$

$$\le C_0\int\limits_G\left|\frac{K\left(t_1,\tau\right)}{\left|t_1-\tau\right|^\alpha}-\frac{K\left(t_2,\tau\right)}{\left|t_2-\tau\right|^\alpha}\right|d\tau=C_0\left[\int\limits_{K_{2\delta}(t_1)}+\int\limits_{G\backslash K_{2\delta}(t_1)}\right]=C_0\left(J_1+J_2\right).$$

Для J_1 получаем, положив $C_1 = \sup\limits_{t,\tau\in\overline{G}} |K(t,\tau)|$:

$$C_0 J_1 \le C_0 C_1 \left[\int\limits_{K_{2\delta}(t_1)} \frac{d\tau}{|t_1-\tau|^\alpha} + \int\limits_{K_{2\delta}(t_1)} \frac{d\tau}{|t_2-\tau|^\alpha} \right] \le$$

$$\le 2C_0 C_1 \int\limits_{K_{4\delta}(t_1)} \frac{d\tau}{|t_1-\tau|^\alpha} = 2C_0 C_1 \mu(S_1) \int\limits_0^{4\delta} \frac{\rho^{n-1} d\rho}{\rho^\alpha} = 2C_0 C_1 \mu(S_1) \frac{(4\delta)^{n-\alpha}}{n-\alpha}.$$

Теперь задаем $\varepsilon > 0$ и подбираем $\delta_1(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $2C_0 C_1 \mu(S_1) \dfrac{(4\delta_1)^{n-\alpha}}{n-\alpha} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Фиксируем далее такое $\delta_1(\varepsilon) > 0$. Тогда функция $\dfrac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}$ равномерно непрерывна на множестве $\{(t,\tau):$ $t \in \overline{G},\ |t-\tau| \ge \delta_1\}$. Поэтому для выбранного $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_2(\varepsilon) > 0$: $\forall \left(t_1, t_2 \in G:\ |t_1 - t_2| < \delta_2\right) \Rightarrow \left| \dfrac{K(t_1,\tau)}{|t_1-\tau|^\alpha} - \dfrac{K(t_2,\tau)}{|t_2-\tau|^\alpha} \right| < \dfrac{\varepsilon}{2C_0 \mu(G)}$ сразу для $\forall(\tau:\ \min\left(|t_1-\tau|, |t_2-\tau|\right) \ge \delta_1)$. Поэтому и $C_0 |J_2| < \varepsilon/2$, если $t_1,\ t_2:\ |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta_2)$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall \left(t_1, t_2 \in G:\ |t_1 - t_2| < \delta\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{f\in X} \left| \left(\hat{K}_\alpha f\right)(t_1) - \left(\hat{K}_\alpha f\right)(t_2) \right| < \varepsilon,$$

т.е. множество $\hat{K}_\alpha X$ равностепенно непрерывно. Поэтому оператор $\hat{K}_\alpha:\ C(G) \to C(G)$ – вполне непрерывный оператор. Его линейность теперь очевидна.

<u>Замечание.</u> Нам в дальнейшем понадобятся также интегральные операторы вида $\left(\hat{K}_\alpha f\right)(t) = \int\limits_S \dfrac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha} f(\tau)\, dS_\tau$, где S – граница ограниченной области G, $K(t,\tau) \in C(S \times S)$, $0 < \alpha < n-1$. Параметризацией поверхности S сводим рассмотрение такого оператора к оператору утверждения 11.5.

§ 12. Интегральный оператор Фредгольма с вырожденным ядром в пространстве $C\left(\overline{G}\right)$

Здесь рассматриваем оператор

$$\left(\hat{K}y\right)(t)=\int_G K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau \tag{12.1}$$

с ядром $K(t,\tau)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(t)\beta_j(\tau)$, где $\alpha_j(t),\beta_j(t)\in C\left(\overline{G}\right)$, $j=1,2,\ldots,m$. Такие ядра называются *вырожденными*. Область G считаем ограниченной. Системы функций $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{m}$ и $\left\{\beta_j\right\}_{j=1}^{m}$ можно считать линейно независимыми без ограничения общности

Рассмотрим следующую задачу: для заданного числа $\mu\in C$ и функции $f\in C\left(\overline{G}\right)$ найти функцию $y\in C\left(\overline{G}\right)$, удовлетворяющую уравнению

$$y(t)=\mu\int_G K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau+f(t). \tag{12.2}$$

Уравнение (12.2) называется *интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром*. Наряду с уравнением (12.2) рассмотрим отвечающее ему *однородное*

$$y(t)=\mu\int_G K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau \tag{12.3}$$

и пару *союзных* (или *сопряженных*) *уравнений*:

$$z(t)=\overline{\mu}\int_G K^*(t,\tau)\,z(\tau)\,d\tau+g(t), \tag{12.4}$$

$$z(t)=\overline{\mu}\int_G K^*(t,\tau)\,z(\tau)\,d\tau, \tag{12.5}$$

где $K^*(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}=\sum\limits_{j=1}^{m}\overline{\alpha_j(\tau)}\,\overline{\beta_j(\tau)}$, а $g\in C(\overline{G})$ – также заданная функция.

Подставляя в (12.2) ядро (12.1), получим

$$y(t)=f(t)+\mu\sum_{j=1}^{m}y_j\alpha_j(t),\quad \text{где } y_j=\int\limits_G y(\tau)\beta_j(\tau)\,d\tau.$$

Далее, подставляя $y(t)$ в (12.2), получаем при $\mu\neq 0$:

$$f(t)+\mu\sum_{j=1}^{m}y_j\alpha_j(t)\,f(t)+\mu\int\limits_G\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(t)\beta_j(\tau)\right)\times$$

$$\times\left(f(\tau)+\mu\sum_{j=1}^{m}y_j\alpha_j(\tau)\right)d\tau;$$

$$\sum_{j=1}^{m}y_j\alpha_j(t)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(t)\left[\int\limits_G\beta_j(\tau)f(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\mu\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_G\beta_j(\tau)\alpha_i(\tau)\,d\tau\right)y_i\right].$$

Функции $\{\alpha_j\}_{j=1}^{m}$ линейно независимы, поэтому решение уравнения (12.2) *равносильно* решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$y_j=\mu\sum_{i=1}^{m}C_{ij}y_i+f_j,\qquad j=1,2,\ldots,m, \tag{12.2$'$}$$

$$y_j=\int\limits_G\beta_j(\tau)y(\tau)\,d\tau;\quad f_j=\int\limits_G\beta_j(\tau)f(\tau)\,d\tau;\quad C_{ij}=\int\limits_G\alpha_j(\tau)\beta_j(\tau)\,d\tau.$$

В самом деле, если $y\in C(\overline{G})$ – решение (12.2), то из приведенных выкладок следует, что $\vec{y}=\{y_1,\ldots,y_m\}$, $y_i=\int\limits_G\beta_j(\tau)y(\tau)\,d\tau$ удовлетворяет системе (12.2′). Обратно, если $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_m)$ – какое-либо решение (12.2′), то функция $y(t)=f(t)+\mu\sum_{j=1}^{m} y_j\alpha_j(t)$, как следует из тех же выкладок, удовлетворяет уравнению (12.2).

Отметим, что уравнения (12.3)–(12.5) тем же образом переходят в эквивалентные им системы линейных алгебраических уравнений:

$$y_j=\mu\sum_{i=1}^{m} C_{ij}\, y_i\,, \tag{12.3′}$$

$$z_j=\overline{\mu}\sum_{i=1}^{m} \overline{C_{ji}}\, z_i+g_j\,, \tag{12.4′}$$

$$z_j=\overline{\mu}\sum_{i=1}^{m} \overline{C_{ji}}\, z_i\,, \tag{12.5′}$$

где $$z_j=\int_G \overline{\alpha_j(\tau)}\, z(\tau)\, d\tau,\quad g_j=\int_G \overline{\alpha_j(\tau)}\, g(\tau)\, d\tau\,,$$

и функция $z(t)=g(t)+\overline{\mu}\sum_{j=1}^{m} \overline{\beta_j(t)}\, z_j$.

Для систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (12.3′)–(12.5′) справедлива следующая теорема (*теорема Фредгольма*).

<u>Теорема 12.1′.</u> 1. Либо уравнение (12.2′) имеет единственное решение при любом $\vec{f}=\{f_1,\dots,f_m\}$, либо уравнение (12.3′) имеет ненулевое решение (*альтернатива Фредгольма*);

2. Уравнение (12.3′) и (12.5′) имеют одно и то же число линейно независимых решений (т.е. размерности пространств решений уравнений (12.3′) и (12.5′) равны);

3. Уравнение (12.2′) разрешимо для тех и только тех $\vec{f}$, которые ортогональны всем решениям $\vec{z}$ уравнения (12.5′): $\sum_{j=1}^{m} f_j\,\overline{z}_j=0$.

<u>Доказательство.</u> Обозначив $C = \left\{c_{ij}\right\}_{i,j=1}^{m}$, запишем уравнения (12.2′)–(12.5′) в матричной форме (стрелка вниз обозначает представление вектора в виде вектора-столбца):

$$(E-\mu C)\underset{\downarrow}{y} = \underset{\downarrow}{f}\,, \tag{12.2″}$$

$$(E-\mu C)\underset{\downarrow}{y} = \underset{\downarrow}{0}\,, \tag{12.3″}$$

$$\left(E-\overline{\mu}C^{*}\right)\underset{\downarrow}{z} = \underset{\downarrow}{g}\,, \tag{12.4″}$$

$$\left(E-\overline{\mu}C^{*}\right)\underset{\downarrow}{z} = \underset{\downarrow}{0}\,, \tag{12.5″}$$

где C^{*} – сопряженная с C матрица. Тогда:

1) (12.2″) однозначно разрешимо $\forall\vec{f} \Leftrightarrow \det(E-\mu C) \neq 0 \Leftrightarrow$ (12.3″) имеет только нулевое решение;

2) $E-\overline{\mu}C^{*} = (E-\mu C)^{*} \Rightarrow r = \mathrm{Rang}(E-\mu C) = \mathrm{Rang}(E-\overline{\mu}C^{*}) \Rightarrow$ размерность пространств решений (12.3″) и (12.5″) равны $(m-r)$, т.е. они равны между собой;

3) если $\underset{\downarrow}{f} = (E-\mu C)\underset{\downarrow}{y}$, а $\left(E-\overline{\mu}C^{*}\right)\underset{\downarrow}{z} = \underset{\downarrow}{0}$, то $\left(\vec{f},\vec{z}\right) = \left((E-\mu C)\,\vec{y},\vec{z}\right) =$ $= \left(y,\left(E-\overline{\mu}C^{*}\right)\vec{z}\right) = \left(\vec{y},\vec{0}\right) = 0$, т.е. если (12.2″) имеет при заданном $\vec{f}$ решение, то $\vec{f}$ ортогональна любому решению (12.5″). Обратно, пусть $\vec{f}$ такова, что она ортогональна всем решениям (12.5″). Тогда, в силу того, что

$$R^{m} = \mathrm{Ker}(E-\mu C)^{*} \oplus \mathrm{Im}(E-\mu C) \Rightarrow \underset{\downarrow}{f} \in \mathrm{Im}(E-\mu C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists y \in R^{m}:\ (E-\mu C)\underset{\downarrow}{y} = \underset{\downarrow}{f}\,.$$

Здесь $\mathrm{Ker}(E-\mu C)^{*}$ и $\mathrm{Im}(E-\mu C)$ – ядро и образ операторов, отвечающих указанным здесь матрицам.

В качестве следствия получаем соответствующую теорему для уравнений (12.2)–(12.5).

<u>Теорема 12.1.</u> 1. Либо уравнение (12.2) имеет единственное решение при любой $f \in C(\overline{G})$, либо уравнение (12.3) имеет ненулевое решение в $C(\overline{G})$.

2. Размерности пространств решений уравнений (12.3) и (12.5) конечны и равны между собой.

3. Уравнение (12.2) разрешимо для тех и только тех $f \in C(\overline{G})$, которые для любого решения z уравнения (12.5) удовлетворяют условию

$$\int_G f(\tau)\overline{z(\tau)}\,d\tau = 0.$$

<u>Доказательство.</u> Пункты 1 и 2 следуют из взаимной однозначности между решениями уравнений (12.2)–(12.5) и СЛАУ (12.2′–12.5′). Для доказательства пункта 3 осталось убедиться, что если $f(\tau) \leftrightarrow \overline{f}$ и $z(\tau) \leftrightarrow \overline{z}$, то $\int\limits_G f(\tau)\overline{z(\tau)}\,d\tau = 0 \Leftrightarrow (\vec{f}, \vec{z}) = 0$. В силу выписанных ранее соотношений:

$$\int_G f(\tau)\overline{z(\tau)}\,d\tau = \int_g f(\tau)\overline{\overline{\mu}\sum_{j=1}^{m}\overline{\beta_j(\tau)}z_j}\,d\tau =$$

$$= \mu\sum_{j=1}^{m}\left(\int_g f(\tau)\beta_j(\tau)\,d\tau\cdot\overline{z}_j\right) = \mu\sum_{j=1}^{m} f_j\overline{z}_j = \mu(\vec{f}, \vec{z}).$$

<u>Замечание.</u> Данная теорема остается справедливой *для любого вполне непрерывного* в $C(\overline{G})$ оператора. В частности, она справедлива для операторов Фредгольма *с непрерывным* в $C(\overline{G}\times\overline{G})$ ядром $K(t,\tau)$ и *с полярным* $\dfrac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}}$, $0 < \alpha < n$, ядром.

Здесь эту теорему доказывать не будем, но полностью ее *докажем в случае евклидовых* пространств.

§ 13. Метод последовательных приближений решения интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма второго рода

Для заданного параметра $\mu \in C$ и функции $f \in C\left(\overline{G}\right)$ рассмотрим интегральные уравнения

$$y(t) = \mu\left(\hat{k}y\right)(t) + f(t), \tag{13.1}$$

$$y(t) = \mu\left(\hat{K}y\right)(t) + f(t), \tag{13.2}$$

$$y(t) = \mu\left(\hat{K}_\alpha y\right)(t) + f(t), \tag{13.3}$$

где операторы $\hat{k}$, $\hat{K}$ и $\hat{K}_\alpha$ были введены ранее. Уравнение (13.1), (13.2), (13.3) называются, соответственно, интегральными уравнениями Вольтерра, Фредгольма и уравнением Фредгольма с полярным ядром второго рода.

13.1. Теорема существования и единственности (ТСЕ) решения интегрального уравнения Вольтера

Теорема 13.1. $\forall f \in C[a,b]$, $\forall \mu \in C \Rightarrow$ уравнение (13.1) имеет и притом единственное решение $y \in C[a,b]$.

Доказательство. 1. Применим *метод последовательных приближений*. Пусть:

$$M = \|f\|_{C[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|, \quad L = \|k\|_{C([a,b]\times[a,b])}.$$

Положим:

$$y_0(t) = f(t),$$

$$y_1(t) = f(t) + \mu\int_a^t k(t,\tau)\, y_0(\tau)\, d\tau,$$

$$. \ . \ . \ ,$$

$$y_n(t) = f(t) + \mu\int_a^t k(t,\tau)\, y_{n-1}(\tau)\, d\tau.$$

Тогда по индукции, используя теорему о непрерывности интеграла по параметру, получаем: $\forall n \Rightarrow y_n \in C[a,b]$.

Далее:

$$|y_1(t)-y_0(t)| = |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \right| \le LM\, |\mu| (t-a);$$

$$|y_2(t)-y_1(t)| = |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau)\big(y_1(\tau)-y_0(\tau)\big)\, d\tau \right| \le$$

$$\le ML^2 |\mu|^2 \int_a^t (\tau-a)\, d\tau = ML^2 |\mu|^2 \frac{(t-a)^2}{2!};$$

и т.д. Для *n*-й разности получаем:

$$|y_n(t)-y_{n-1}(t)| = |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau)\big(y_{n-1}(\tau)-y_{n-2}(\tau)\big)\, d\tau \right| \le$$

$$\le ML^n |\mu|^n \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (\tau-a)^{n-1}\, d\tau = ML^n |\mu|^n \frac{(t-a)^n}{n!}.$$

Теперь рассмотрим ряд: $y(t) = y_0(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(y_k(t) - y_{k-1}(t)\big)$.

Это ряд из непрерывных функций, который, в силу полученных оценок, по теории Вейерштрасса сходится *равномерно* на $[a,b]$ при $\forall \mu \in C$. Но тогда его сумма $y(t) \in C[a,b]$. Покажем, что $y(t)$ *удовлетворяет уравнению* (13.1). Так как

$$y_n(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{n} \big(y_k(t) - y_{k-1}(t)\big) \xrightarrow[{[a,b]}]{} y(t),$$

то, по теореме о переходе к пределу под знаком собственного интеграла, получаем:

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left(f(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)\, y_{n-1}(\tau)\, d\tau \right) =$$

$$= f(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau,$$

т.е. найденная функция есть решение уравнения (13.1).

2. Докажем *единственность* этого решения. Если $y_1(t)$ и $y_2(t) \in C[a,b]$ два решения (13.1), то $z(t) = y_1(t) - y_2(t) \in C[a,b]$ и удовлетворяют уравнению:

$$z(t) = \mu \int_a^t k(t,\tau)\, z(\tau)\, d\tau .$$

Но тогда $\forall n \Rightarrow z(t) = \mu \int_a^t k(t,\tau_1)\, d\tau_1 \int_a^{\tau_1} k(\tau_1,\tau_2)\, z(\tau_2)\, d\tau_1 = \ldots =$

$$= \mu^n \int_a^t k(t,\tau_1)\, d\tau_1 \int_a^{\tau_1} k(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_2 \ldots \int_a^{\tau_{n-1}} k(\tau_{n-1},\tau_n)\, z(\tau_n)\, d\tau_n.$$

Отсюда получаем оценку для модуля функции:

$$|z(t)| \le |\mu|^n L^n \|z\|_{C[a,b]} \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_a^{\tau_{n-1}} d\tau_n =$$

$$= |\mu|^n L^n \|z\|_C \frac{(t-a)^n}{n!} \le |\mu|^n L^n \frac{(b-a)^n}{n!} \|z\|_C .$$

Следовательно, справедливо неравенство:

$$\forall n: \quad \|z\|_C = \sup_{t \in [a,b]} |z(t)| \le |\mu|^n L^n (b-a)^n \|z\|_C \frac{1}{n!}.$$

Это возможно лишь при $\|z\|_C = 0$, так как $\dfrac{(|\mu| L (b-a))^n}{n!} \to 0$ при $n \to +\infty$. Следовательно, $z(t) \equiv 0$ на $[a,b]$. Теорема доказана.

13.2. ТСЕ решения интегрального уравнения Фредгольма

Теорема 13.2. Пусть $L = \|K\|_{C(\bar{G}\times\bar{G})}$, $\mu(G) < +\infty$ – мера области G. Тогда $\forall \left(\mu: \ |\mu| < \dfrac{1}{L\mu(G)} \right) \Rightarrow$ уравнение (13.2) имеет и притом единственное решение.

Доказательство. Доказательство проводим методом последовательных приближений. Полагаем: $y_0(t) = f(t)$,

$$y_1(t) = f(t) + \mu \int_G K(t,\tau)\, y_0(\tau)\, d\tau,$$

$$. \ . \ . \ ,$$

$$y_n(t) = f(t) + \mu \int_G K(t,\tau)\, y_{n-1}(\tau)\, d\tau.$$

Имеем $\forall n \Rightarrow \ y_n \in C(\bar{G})$ и, положив $M = \|f\|_C$, получаем:

$$|y_1(t) - y_0(t)| \le |\mu| ML\mu(G);$$

$$|y_2(t) - y_1(t)| \le M(|\mu| L\mu(G))^2,$$

$$. \ . \ . \ ,$$

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le M(|\mu| L\mu(G))^n, \quad n = 1,\ 2, \ldots .$$

Тогда в силу условий теоремы, используя теорему Вейерштрасса, получаем, что ряд

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(y_n(t) - y_{n-1}(t) \right)$$

сходится на $\bar{G}$ равномерно. Следовательно, $y(t) \in C(\bar{G})$ и $y(t) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)$. Используя теорему о переходе к пределу под знаком интеграла, получаем, что $y(t)$ есть решение уравнения (13.2). Наконец, если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – два решения, то $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$z(t) = \mu \int_G K(t,\tau)\, z(\tau)\, d\tau,$$

откуда $\|z\|_C \le |\mu| L\mu(G)\|z\|_C$. В силу того, что $|\mu| L\mu(G) < 1$ получаем: $\|z\|_C = 0$ т.е. решение уравнения (13.2) единственно.

13.3. ТСЕ решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с полярным ядром

Рассмотрим теперь уравнение (13.3) с полярным ядром $K_\alpha(t,\tau)$:

$$K_\alpha(t,\tau) = \frac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}, \quad K(t,\tau) \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right), \quad 0 < \alpha < n.$$

Обозначим: $\sup\limits_{t,\tau \in \overline{G}} |K(t,\tau)| = L$, $\operatorname{diam} G = d$, $|S_1|$ – площадь единичной сферы в R^n.

Тогда

$$\sup_{t,\tau \in \overline{G}} \left(\int_G |K_\alpha(t,\tau)| d\tau \right) \le L \sup_{t \in \overline{G}} \left(\int_G \frac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha} \right) \le$$

$$\le \sup_{t \in \overline{G}} \left(L \int_{|\tau - t| \le d} \frac{d\tau}{|t-\tau|\alpha} \right) = L|S_1| \int_0^d \rho^{n-\alpha-1} d\rho = L|S_1| \frac{d^{n-\alpha}}{n-\alpha}.$$

Теорема 13.3. Пусть $d = \operatorname{diam} G < +\infty$. Положим $r_0 = \left(L|S_1| \dfrac{d^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right)^{-1}$. Тогда $\forall f \in C\left(\overline{G}\right)$, $\forall\left(\mu:\ |\mu| < r_0\right) \Rightarrow$ существует и единственное решение уравнения (13.3) $y \in C\left(\overline{G}\right)$.

Доказательство. Вновь проводим доказательство методом последовательных приближений, положив:

$$y_0(t) = f(t),$$

$$y_n(t) = f(t) + \mu \int\limits_G K_\alpha(t,\tau)\, y_{n-1}(\tau)\, d\tau .$$

Тогда $\forall n \Rightarrow y_n \in C(\overline{G})$, так как $\hat{K}_\alpha :\ C(\overline{\theta}) \to C(\overline{G})$. Далее имеем:

$$|y_0(t)| \le M = \|f\|_{C(G)};$$

$$|y_1(t) - y_0(t)| \le M|\mu| \int\limits_G |K_\alpha(t,\tau)|\, d\tau \le M\left(|\mu|\, r_0^{-1}\right);$$

$$. \ . \ . \ ;$$

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le M\left(|\mu|\, r_0^{-1}\right)^n, \quad n = 1,\ 2,\ 3\dots .$$

Так как $|\mu|\, r_0^{-1} < 1$, то по теореме Вейерштрасса ряд

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(y_k(t) - y_{k-1}(t)\right)$$

сходится равномерно на $\overline{G}$. Но тогда $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) \in C(\overline{G})$.

Далее:

$$y_n(t) = \mu \int\limits_G K_\alpha(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau + \mu \int\limits_G K_\alpha(t,\tau)\left(y_{n-1}(\tau) - y(\tau)\right) d\tau$$

и так как при $n \to +\infty$:

$$\mu \left| \int\limits_G K_\alpha(t,\tau)\left(y_{n-1}(\tau) - y(\tau)\right) d\tau \right| \le |\mu|\, \|y_{n-1} - y\|_C \cdot r_0^{-1} \to 0,$$

то при $n \to +\infty$ получаем, что $y(t)$ – решение уравнения (13.3). *Единственность* доказывается так же, как в теореме 13.2.

13.4. Принцип сжимающих отображений

Выкладки разд. 13.1–13.3 носят общий характер. Пусть X – нормированное пространство, а $\hat{A} : X \to X$ некоторый (не обязательно линейный) оператор.

Определение 13.1. Оператор $\hat{A} :\ X \to X$ называется *сжатием* (*сжимающим оператором*), если

$$\exists 0 \le \alpha < 1 :\ \forall x, y \in X \Rightarrow \ \left\|\hat{A}x - \hat{A}y\right\| \le \alpha \|x - y\| .$$

Упражнение. Если $\hat{A}:X \to X$ линейный, то $\hat{A}$ сжатие $\Leftrightarrow \left\|\hat{A}\right\| < 1$.

Теорема 13.4 (принцип сжимающих отображений). Если X – *банахово* пространство, и оператор $\hat{A}: X \to X$ – *сжатие*, то уравнение $x = \hat{A}x$ имеет в X единственное решение, которое может быть найдено *методом последовательных приближений*:

$$x_n = \hat{A}x_{n-1}, \quad x_0 \in X \text{ – произвольно.}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ – произвольно. Положим $x_n = \hat{A}x_{n-1} = \hat{A}^n x_0$. Тогда

$$\forall n \ge m \Rightarrow \left\|x_n - x_m\right\| = \left\|\hat{A}^n x_0 - \hat{A}^m x_0\right\| \le \alpha \left\|\hat{A}^{n-1}x_0 - \hat{A}^{m-1}x_0\right\| \le$$

$$\le \ldots \le \alpha^m \left\|\hat{A}^{n-m}x_0 - x_0\right\| = \alpha^m \left\|x_{n-m} - x_{n-m-1} + x_{n-m-1} - \ldots + x_1 - x_0\right\| \le$$

$$\le \alpha^m \left(\left\|x_{n-m} - x_{n-m-1}\right\| + \ldots + \left\|x_1 - x_0\right\|\right) \le$$

$$\le \alpha^m \left(\alpha^{n-m-1}\left\|x_1 - x_0\right\| + \alpha^{n-m-2}\left\|x_1 - x_0\right\| + \ldots + \left\|x_1 - x_0\right\|\right) \le$$

$$\le \alpha^m \left\|x_1 - x_0\right\| \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots\right) = \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\left\|\hat{A}x_0 - x_0\right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная в X последовательность. Так как X – полное, то $\exists x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$. Далее, так как $\hat{A}$ – сжатие: $\left\|\hat{A}x_n - \hat{A}x\right\| \le \alpha \left\|x_n - x\right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, т.е. и $\hat{A}x_n \to \hat{A}x$ в X. Тогда $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{A}x_{n-1} = \hat{A}x$, т.е. x – решение уравнения $x = \hat{A}x$. Единственность очевидна, так как если x_1 и x_2 – решения этого уравнения, то $\left\|x_1 - x_2\right\| = \left\|\hat{A}x_1 - \hat{A}x_2\right\| \le \alpha \left\|x_1 - x_2\right\|$, т.е. $\left\|x_1 - x_2\right\| = 0$.

Упражнение. Взяв $X = C\left(\overline{G}\right)$, а $\hat{A} = \hat{K}$ (или $\hat{K}_\alpha$), доказать теоремы 13.2 и 13.3.

§ 14. Спектр и резольвента линейного оператора в нормированной пространстве

14.1. Общие определения

Определение 14.1. Пусть X – нормированное пространство, $\hat{A}$ – оператор в X с областью определения $D(\hat{A})$. Оператор $\hat{B}$ с областью определения $D(\hat{B})$, действующий в X, называется *обратным* к $\hat{A}$ *(обозначается* $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$), если

$$\begin{cases} \exists \hat{A}\hat{B}x = x, & \forall x \in D(\hat{B}), \\ \exists \hat{B}\hat{A}x = x, & \forall x \in D(\hat{A}). \end{cases}$$

Упражнение. Доказать свойства:

1) $\left(\hat{A}^{-1}\right)^{-1} = \hat{A}$;

2) $\hat{A}^{-1}$ линейный $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ – линейный.

Определение 14.2.

1. Множество всех точек $\mu \in C$, для которых *существует* и *ограничен* оператор $\left(\hat{I} - \mu\hat{A}\right)^{-1}$, называется *резольвентным множеством* оператора $\hat{A}$, а его точки – *регулярными точками* оператора $\hat{A}$.

2. Все остальные точки $\mu \in C$ называются точками *характеристического спектра*.

3. Оператор $\left(\hat{I} - \mu\hat{A}\right)^{-1} = R_\mu\left(\hat{A}\right)$ называется *резольвентой оператора* $\hat{A}$.

Пример 14.1. Если $X = C[a,b]$, $\hat{A} = \hat{k}$ – интегральный оператор Вольтерра, то вся плоскость С состоит из регулярных точек, т.е. совпадает с резольвентным множеством.

Теорема 14.1. Пусть $\hat{A}: X \to X$ – линейный ограниченный оператор. Тогда $\forall \left(\mu \in C: \ |\mu| < \left\| \hat{A} \right\|^{-1} \right) \Rightarrow \ \exists R_\mu \left(\hat{A} \right)$ и $R_\mu \left(\hat{A} \right)$ представляется *рядом Неймана* $\hat{R}_\mu \left(\hat{A} \right) = \hat{I} + \sum_{K=1}^{\infty} \mu^k \hat{A}^k.$

Доказательство. Рассмотрим оператор $\hat{R}_n = \hat{I} + \sum_{K=1}^{n} \mu^k \hat{A}^k.$

Тогда $\hat{R}_n \left(\hat{I} - \mu \hat{A} \right) = \hat{I} - \mu^{n+1} \hat{A}^{n+1}, \ \left(\hat{I} - \mu \hat{A} \right) \hat{R}_n = \hat{I} - \mu^{n+1} \hat{A}^{n+1}.$

Отсюда $\left\| \left(\hat{R}_n \left(\hat{I} - \mu \hat{A} \right) - \hat{I} \right) \right\| = \left\| \left(\hat{I} - \mu \hat{A} \right) \hat{R}_n - \hat{I} \right\| = \left\| \mu^{n+1} \hat{A}^{n+1} \right\| \le$

$$\le |\mu|^{n+1} \|A\|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ , \text{ так как } |\mu| \|A\| < 1 .$$

Следовательно: $\exists \hat{R}_\mu \left(\hat{A} \right) = \lim_{n\to\infty} \hat{R}_n = \hat{I} + \sum_{K=1}^{\infty} \mu^k \hat{A}^k.$

14.2. Интегральные операторы

Вновь рассмотрим операторы $\hat{k}$, $\hat{K}$ и $\hat{K}_\alpha$ в пространстве непрерывных функций.

1. Оператор $\hat{k}$.

Обозначим $k(t,\tau) = k_1(t,\tau)$, положим $L = \sup_{t,\tau\in[a,b]} |k(t,\tau)|$. Тогда $\forall y \in C[a,b]$ будет выполняться:

$$\left(\hat{k}^2 y \right)(t) = \int_a^t k_1(t,s) \left(\int_a^\Delta k_1(s,\tau) y(\tau) d\tau \right) ds =$$

$$= \int_a^t y(\tau) d\tau \int_\tau^t k_1(t,s) k_1(s,\tau) d\Delta = \int_a^t k_2(t,\tau) y(\tau) d\tau,$$

где $k_2(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t} k_1(t,s)\,k_1(s,\tau)\,ds$ – *свертка* ядра $k_1(t,\tau)$ с собой. При этом $\left|k_2(t,\tau)\right|\le L^2(t-\tau)$.

Далее:

$$\left(\hat{k}^3 y\right)(t)=\left(\hat{k}\cdot\hat{k}^2 y\right)(t)=\int\limits_a^t k_1(t,s)\left(\int\limits_a^s k_2(s,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right)=$$

$$=\int\limits_a^t k_3(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau,$$

где $k_3(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t} k_1(t,s)\,k_2(s,t)\,ds$ – *свертка* ядра $k_1(t,\tau)$ с ядром $k_2(t,\tau)$. При этом аналогично предыдущему

$$\left|k_3(t,\tau)\right|\le L^3\int\limits_{\tau}^{t}(s-\tau)\,ds=L^3\frac{(t-\tau)^2}{2!}.$$

Повторяя этот процесс, получаем, что оператору $\hat{k}^n$ отвечает ядро $k_n(t,\tau)$, где

$$k_n(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t} k_1(t,s)\,k_{n-1}(s,\tau)\,ds\,,$$

$$\left|k_n(t,\tau)\right|\le L^n\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!},\qquad \forall(t,\tau\in[a,b]\subseteq(-\infty,+\infty):(\tau<t)).$$

Но тогда

$$\left(\hat{R}_{\mu} y\right)(t)=y(t)+\mu\int\limits_a^t\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{n-1}k_n(t,\tau)\right)y(\tau)\,d\tau=$$

$$=y(t)+\mu\int\limits_a^t\Gamma_{\mu}(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau.$$

<u>Определение 14.3.</u> *Разрешающим ядром* оператора $\hat{k}$ называется ядро $\Gamma_\mu(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} k_n(t,\tau)$.

Из полученных выше оценок следует, что $\forall(\tau, t \in [a;b] : \tau < t)$

$$\left|\Gamma_\mu(t,\tau)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} L^n |\mu|^{n-1} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}$$

и, следовательно, это ядро является непрерывной функцией во всех точках (t,τ): $a \le \tau < t < b$. Функция $\Gamma_\mu(t,\tau)$ по параметру $\mu \in C$ – аналитическая во всей плоскости C (т.е. целая) функция.

Если ядро $\Gamma_\mu(t,\tau)$ подсчитано, то решение уравнения

$$y(t) = \mu \hat{k} y(t) + f(t)$$

определяется формулой

$$y(t) = \left(R_\mu\left(\hat{k}\right) f\right)(t) = f(t) + \mu \int_a^t \Gamma_\mu(t,\tau) f(\tau)\, d\tau .$$

2. Теперь рассмотрим оператор $\hat{K}$. Вновь обозначая его ядро $K(t,\tau) = K_1(t,\tau)$, получим, что оператору $\hat{K}^n$ отвечает ядро $K_n(t,\tau)$, где $K_n(t,\tau) = \int_G K_1(t,s) K_{n-1}(s,\tau)\, d\tau$ – *свертка* ядер операторов $\hat{K}$ и $\hat{K}^{n-1}$. Если положить $L = \sup_{t,\tau \in \overline{G}} \left|K_1(t,\tau)\right|$, $\mu(G) < +\infty$ – мера области G, то $\sup_{t,\tau \in \overline{G}} \left|K_n(t,\tau)\right| \le L^n (\mu(G))^{n-1}$.

Тогда для $\forall(\mu: |\mu| \cdot L\mu(G)) < 1$ определена резольвента $R_\mu\left(\hat{K}\right)$ и при этом

$$\left(R_\mu\left(\hat{K}\right) y\right)(t) = y(t) + \mu \int_G \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} K_n(t,\tau)\right] y(\tau)\, d\tau =$$

$$= y(t) + \mu \int_G \Gamma_\mu(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

При этих значениях μ решение уравнения

$$y = \mu \hat{K} y + f$$

дается формулой:

$$y(t) = \left(R_{\mu}\left(\hat{k}\right) f\right)(t) = f(t) + \mu \int_G \Gamma_{\mu}(t, \tau) f(\tau)\, d\tau .$$

§ 15. Линейные операторы в евклидовых пространствах

Далее рассматриваем линейный, ограниченный оператор $\hat{A}$ в евклидовом пространстве E со скалярным произведением (· ; ·).

15.1. Теорема Рисса о представлении линейного функционала в евклидовом пространстве

Теорема 15.1. Пусть $f : E \to C$ (или R) – линейный, ограниченный функционал в евклидовом пространстве E.

Тогда существует и притом единственный элемент $y_f \in E: \ \forall x \in R \Rightarrow f(x) = \left(x, y_f\right)$. При этом $\left\| y_f \right\| = \| f \|$.

Доказательство. Пусть $X = \{x \in E : \ f(x) = 0\}$ – нуль-пространство функционала *f*. Если $X = E$, то $y_f = \theta$. Если же $X \neq E$, то $\exists \left(y_0 \in E, y_0 \neq 0\right): \ y_0 \perp \mathrm{X}$, т.е. $\forall x \in X \Rightarrow \ \left(x, y_0\right) = 0$.

Положим

$$y_f = \overline{f\left(y_0\right)} \frac{y_0}{\left\| y_0 \right\|^2}$$

и покажем, что y_f – искомый элемент. Имеем:

1) $\left(y_f ; y_f\right) = \dfrac{\left| f\left(y_0\right)\right|^2}{\left\| y_0 \right\|^2} = f\left(y_f\right)$;

2) $\forall x' \in X \Rightarrow \ \left(x', y_f\right) = 0 = f(x')$.

Но тогда, так как $\forall x \in E \Rightarrow x = \left(x - \frac{f(x)}{f\left(y_f\right)} y_f \right) + \frac{f(x)}{f\left(y_f\right)} y_f$, и значение $x' = x - \frac{f(x)}{f\left(y_f\right)} y_f \in X$, то

$$\left(x, y_f\right) = \frac{f(x)}{f\left(y_f\right)} \left(y_f, y_f\right) = f(x).$$

Таким образом, выполнение нужного равенства установлено.

Далее:

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| \ge \left| f\left(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|} \right) \right| = \left\|y_f\right\|,$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \le 1} \left|\left(x, y_f\right)\right| \le \left\|y_f\right\|, \text{ т.е. } \|f\| = \left\|y_f\right\|.$$

Наконец, *единственность* y_f очевидно следует из того, что если $\left(x, y_f\right) = 0$ для $\forall x \in E$, то, взяв $x = y_f$, получим $y_f = \theta$.

Замечание. Доказанная теорема означает, что евклидово пространство E *изометрично* своему сопряженному, $f \leftrightarrow y_f$ – изометрический изоморфизм. Поэтому евклидово пространство E отождествляют со своим сопряженным.

15.2. Сопряженный оператор

Определение 15.1. Пусть $\hat{A}:\ E \to E$ – линейный, ограниченный оператор $\left(D\left(\hat{A}\right) = E\right)$. Оператор $\hat{A}^*:\ E \to E$ называется *сопряженным* к оператору $\hat{A}$, если $\forall x, y \in E \Rightarrow \left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}^* y\right)$.

Теорема 15.2. Для любого линейного ограниченного оператора $\hat{A}:\ E \to E$ справедливы утверждения:

1) существует и притом единственный оператор $\hat{A}^*$;

2) $\hat{A}^*$ – также линейный, ограниченный оператор, причем $\left\|\hat{A}\right\| = \left\|\hat{A}^*\right\|$;

3) $\left(A^*\right)^* = A$.

<u>*Доказательство.*</u> 1. Фиксируем $y \in E$. Тогда $h(x) = \left(\hat{A}x, y\right)$ – линейный ограниченный функционал на *E*. По теореме Рисса существует и притом *единственный* элемент $h \in E$, такой, что $\forall x \in E \Rightarrow \left(\hat{A}x, y\right) = (x, h)$. Определим оператор $\hat{A}^*$, положив:

$$\forall y \in E \Rightarrow \hat{A}^* y = h \Rightarrow \left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}^* y\right).$$

Тогда оператор $\hat{A}^*$ определен *однозначно*.

2. Проверим, что $\hat{A}^*$ – линейный оператор. Для $\forall y_1, y_2 \in E$,

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in C \Rightarrow \left(x, \hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right)\right) = \left(\hat{A}x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) =$$
$$= \overline{\alpha}_1\left(\hat{A}x, y_1\right) + \overline{\alpha}_2\left(\hat{A}x, y_2\right) = \left(x, \alpha_1 \hat{A}^* y_1 + \alpha_2 \hat{A}^* y_2\right),$$

для всех $x \in E$. Но тогда, взяв $x = \hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) - \alpha_1 \hat{A}^* y_1 - -\alpha_2 \hat{A}^* y_2$, получим:

$$0 = \left(x, \hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) - \alpha_1 \hat{A}^* y_1 - \alpha_2 \hat{A}^* y_2\right) =$$
$$= \left\|\hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) - \alpha_1 \hat{A}^* y_1 - \alpha_2 \hat{A}^* y_2\right\|^2.$$

Следовательно, $\hat{A}^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) = \alpha_1 \hat{A}^* y_1 + \alpha_2 \hat{A}^* y_2$, т.е. $\hat{A}^*$ – *линейный* оператор.

Далее: $\forall x, y \in E \Rightarrow \left|(x, \hat{A}^* y)\right| = \left|(\hat{A}x, y)\right| \le \left\|\hat{A}\right\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$, откуда, взяв $x = \hat{A}^* y$, получаем: $\left\|\hat{A}^* y\right\|^2 \le \left\|\hat{A}\right\| \cdot \left\|\hat{A}^* y\right\| \cdot \|y\|$ для $\forall y \in E$,

$$\left\|\hat{A}^*\right\| = \sup_{y \ne \theta} \frac{\left\|\hat{A}^* y\right\|}{\|y\|} \le \left\|\hat{A}\right\|, \text{ т.е. } \hat{A}^* \text{ – } \textit{ограниченный} \text{ и } \left\|\hat{A}^*\right\| \le \left\|\hat{A}\right\|.$$

Так как $\left|\left(\hat{A}x, y\right)\right| = \left|\left(x, \hat{A}^* y\right)\right| \le \|x\| \cdot \|y\| \cdot \left\|\hat{A}^*\right\|$, то, взяв $y = \hat{A}x$, получим аналогично, что $\left\|\hat{A}\right\| \le \left\|\hat{A}^*\right\|$. Таким образом, $\left\|\hat{A}\right\| \le \left\|\hat{A}^*\right\|$.

3. Так как $\hat{A}^*$ – линейный и ограниченный оператор в E, то существует $\left(\hat{A}^*\right)^*$ и $\forall x, y \in E \Rightarrow \left(\hat{A}^* x, y\right) = \left(x, \left(\hat{A}^*\right)^* y\right) = \left(x, \hat{A} y\right)$, тогда: $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

<u>*15.3. Самосопряженные операторы*</u>

<u>Определение 15.2.</u> Линейный, ограниченный оператор $\hat{A} : E \to E$ называется *самосопряженным*, если

$$\forall x, y \in E \Rightarrow \left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}y\right), \text{ т.е. } \hat{A} = \hat{A}^*.$$

<u>Теорема 15.3.</u> Если $\hat{A}$ – самосопряженный оператор в E, то его норму можно подсчитать по формуле: $\left\|\hat{A}\right\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right|$.

<u>Доказательство.</u> Положим $\mu = \sup\limits_{\|x\|=1} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right|$. Тогда $\mu \le \le \sup\limits_{\|x\|=1} \left\|\hat{A}\right\| \|x\|^2 = \left\|\hat{A}\right\|$. Теперь покажем, что $\mu \ge \left\|\hat{A}\right\|$.

Имеем: $\left(\hat{A}(x+y), x+y\right) - \left(\hat{A}(x-y), x-y\right) = 4\,\mathrm{Re}\left(\hat{A}x, y\right)$, отсюда: $\left|4\,\mathrm{Re}\left(\hat{A}x, y\right)\right| \le \mu\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = 2\mu\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

Пусть теперь: $\forall x \in E$: $\|x\| = 1$, $y = \dfrac{\hat{A}x}{\left\|\hat{A}x\right\|}$. Тогда $\|y\| = 1$ и для $\forall x \in E$ получаем $\left|4\,\mathrm{Re}\left(\hat{A}x, y\right)\right| = 4\left\|\hat{A}x\right\| \le 2\mu(1+1) = 4\mu$.

Откуда $\|A\| \overset{def}{=} \sup\limits_{\|x\|=1} \left|\hat{A}x\right| \le \mu$. И получим, что

$$\left\|\hat{A}\right\| = \mu = \sup_{\|x\|=1} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right|.$$

<u>Упражнение.</u> Показать, что:

1) собственные значения, если они есть, самосопряженного оператора $\hat{A}$ действительны;

2) собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям оператора $\hat{A}$, ортогональны.

15.4. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в E

Напомним, что оператор $\hat{A}: E \to E$ называется *вполне непрерывным*, если он переводит любое ограниченное в E множество в множество, относительно компактное E.

Рассмотрим дополнительные свойства таких операторов.

Определение 15.3. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ называется *слабосходящейся* к $x \in E$, если $\forall h \in E \Rightarrow \left(h, x_n\right) \underset{n\to\infty}{\to} (h, x)$.

Записываем это так: $x = w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Упражнение. Доказать, что слабый предел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *единственный*.

Лемма 15.1. Всякий вполне непрерывный оператор в E переводит любую слабо сходящуюся, ограниченную последовательность в последовательность, сходящуюся по норме.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$: $\forall n \Rightarrow \|x_n\| \le 1$ и $w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \theta$. Тогда

$$\forall h \in E \Rightarrow \left(\hat{A}x_n, h\right) = \left(x_n, \hat{A}^* h\right) \to \left(\theta, \hat{A}^* h\right) = (\theta, h),$$

т.е. и $w - \lim\limits_{n\to\infty} \hat{A}x_n = \theta$. Покажем, что $\left\|\hat{A}x_n\right\| \to 0$. Допустим противное, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall N \Rightarrow \exists n_k > N$: $\left\|\hat{A}x_{n_k}\right\| \ge \varepsilon_0$.

Оператор A – вполне непрерывный в E. Следовательно, так как последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то существует последовательность $\left\{\hat{A}x_{n_{k_p}}\right\}_{p=1}^{\infty}$ *фундаментальная* в E. Тогда имеем оценку:

$$\varepsilon_0^2 \le \left\|\hat{A}x_{n_{k_p}}\right\|^2 = \left(\hat{A}x_{n_{k_p}}, \hat{A}x_{n_{k_p}} - \hat{A}x_{n_{k_z}}\right) + \left(\hat{A}x_{n_{k_p}}, \hat{A}x_{n_{k_r}}\right) \le$$

$$\le \left\|\hat{A}\right\| \left\|\hat{A}x_{n_{k_p}} - \hat{A}x_{n_{k_r}}\right\| + \left|\left(\hat{A}x_{n_{k_p}}, \hat{A}x_{n_{k_r}}\right)\right|.$$

Получаем $\exists N:\ \forall n_{k_p}, n_{k_r} > N \Rightarrow \left\| \hat{A}x_{n_{k_p}} - \hat{A}x_{n_{k_r}} \right\| < \frac{1}{2}\varepsilon_0^2$.

Фиксируем n_{k_p}. Тогда $\left(\hat{A}x_{n_{k_p}}, \hat{A}x_{n_{k_r}} \right) \to \left(\hat{A}x_{n_{k_p}}, \theta \right) = 0$ при $n_{k_r} \to \infty$. Следовательно, при достаточно больших n_{k_r} получаем:

$$\varepsilon_0^2 \le \left\| \hat{A}x_{n_{k_p}} \right\|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_0^2.$$

Пришли к противоречию. Это и означает, что $\left\| \hat{A}x_n - \hat{A}\theta \right\| \to 0$.

<u>Лемма 15.2.</u> Если A – вполне непрерывный оператор в E, а последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ ограничена и $w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то

$$\left(\hat{A}x_n, x_n \right) \to \left(\hat{A}x, x \right).$$

<u>Доказательство.</u>

$$\left| \left(\hat{A}x_n, x_n \right) - \left(\hat{A}x, x \right) \right| = \left| \left(\hat{A}x_n, x_n \right) - \left(\hat{A}x, x_n \right) + \left(\hat{A}x, x_n \right) - \right.$$
$$\left. - \left(\hat{A}x, x \right) \right| \le \left\| \hat{A}x_n - \hat{A}X \right\| \left\| x_n \right\| + \left| \left(\hat{A}x, x_n - x \right) \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

так как $\left\| \hat{A}x_n - \hat{A}x \right\| \to 0$ по лемме 15.1, а $\left(\hat{A}x, x_n - x \right) \to 0$ в силу слабой сходимости x_n к элементу x.

<u>Лемма 15.3.</u> Из всякого бесконечного ограниченного множества в E можно выбрать слабосходящуюся последовательность.

<u>Упражнения.</u>

1. Доказать лемму 15.3.
2. Доказать, если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ слабо сходится, то она ограничена.
3. $\forall$ ОНС $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ слабо сходится к нулевому элементу θ.
4. Если $\hat{A} = \hat{A}^*$, то $\forall x \in E \Rightarrow \left(\hat{A}x, x \right) \in R$.

<u>Теорема 15.4.</u> У всякого линейного, вполне непрерывного, самосопряженного оператора $\hat{A}$ в E существует хотя бы одно собственное значение λ: $|\lambda| = \left\| \hat{A} \right\|$. Среди всех собственных значений оператора $\hat{A}$ это собственное значение является наибольшим по модулю.

<u>*Доказательство.*</u> Обозначим: $M = \sup\limits_{\|x\|=1}\left(\hat{A}x, x\right)$, $m = \inf\limits_{\|x\|=1}\left(\hat{A}x, x\right)$.

Пусть $|M| \geq |m|$ (случай $|M| < |m|$ сводится к рассматриваемому заменой $\hat{A} \to -\hat{A}$). Тогда $M > 0$. Покажем, что $\lambda = M$ – собственное значение оператора $\hat{A}$ (по теореме 15.3 $\Rightarrow M = \|\hat{A}\|$).

Так как $M = \sup\limits_{\|x\|=1}\left(\hat{A}x, x\right)$, то существует последовательность $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset E$: $\|x_n\| = 1$ и $\left(\hat{A}x_n, x_n\right) \to M$. По лемме 15.3 следует существование $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$: $\exists\ w - \lim\limits_{K\to\infty} x_{n_K} = x_0$, а по лемме 15.2 имеем: $\left(\hat{A}x_{n_k}, x_{n_k}\right) \to \left(\hat{A}x_0, x_0\right)$, следовательно, $\left(\hat{A}x_0, x_0\right) = M$.

Покажем, что $\|x_0\| = 1$:

$$\|x_0\|^2 = (x_0, x_0) \leq \left|\left(x_0 - x_{n_k}, x_0\right)\right| + \left|\left(x_{n_k}, x_0\right)\right| \leq$$
$$\leq \left|\left(x_0 - x_{n_k}, x_0\right)\right| + \|x_0\|.$$

Так как $\left(x_0 - x_{n_k}, x_0\right) \to 0$ при $n_k \to \infty$, то получаем, что $\|x_0\|^2 \leq \|x_0\|$, т.е. $\|x_0\| \leq 1$.

Предположим, что $\|x_0\| < 1$. Тогда положим $y_0 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ и получим $\left(\hat{A}y_0, y_0\right) = \dfrac{1}{\|x_0\|^2}\left(\hat{A}x_0, x_0\right) > M$, что невозможно. Следовательно, $\|x_0\| = 1$. <u>Получили:</u> $\exists x_0 \in E$: $\|x_0\| = 1$ и $\sup\limits_{\|x\|=1}\left(\hat{A}x, x\right) = \left(\hat{A}x_0, x_0\right) =$ $= M = \|\hat{A}\|$ (см. теорему 15.3).

Докажем, что x_0 – собственный вектор оператора $\hat{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda = \|\hat{A}\|$. Имеем:

$$\|\hat{A}x_0 - \lambda x_0\|^2 = \left(\hat{A}x_0 - \lambda x_0,\ \hat{A}x_0 - \lambda x_0\right) = \|\hat{A}x_0\|^2 -$$

$$-\lambda\left(x_0, \hat{A}x_0\right) - \lambda\left(\hat{A}x_0, x_0\right) + \lambda^2\left(x_0, x_0\right) = \|\hat{A}x_0\|^2 - \lambda^2 \le 0.$$

Но тогда $\|\hat{A}x_0 - \lambda x_0\|^2 = 0 \Rightarrow \hat{A}x_0 = \lambda x_0,$ где $\lambda = \|\hat{A}\|$.

Далее, если λ_1 – любое собственное значение оператора $\hat{A}$, x_1 – отвечающий λ_1 собственный вектор с $\|x_1\| = 1$, то:

$$|\lambda_1| = |(\lambda_1 x_1, x_1)| = \left|\left(\hat{A}x_1, x_1\right)\right| \le \sup_{\|x\|=1}\left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| = \|\hat{A}\|.$$

Теорема доказана.

Отметим еще следующие свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного вполне непрерывного оператора $\hat{A}$.

<u>Теорема 15.5.</u> 1. Любому *ненулевому* собственному значению λ самосопряженного, вполне непрерывного оператора $\hat{A}$ может отвечать лишь *конечное число линейно независимых собственных векторов*.

2. Если вполне непрерывный, самосопряженный оператор $\hat{A}$ имеет бесконечно много собственных значений, то единственной их предельной точкой является точка $\lambda = 0$.

<u>*Доказательство.*</u> 1. Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ – *бесконечное множество* собственных векторов $\hat{A}$, отвечающих собственному значению $\lambda \ne 0$. Допустим, что *они линейно независимы*. Проводя ортогонализацию по Шмидту системы функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, получим ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$: $\hat{A}e_k = \lambda e_k$. Тогда согласно неравенству Бесселя имеем: $\forall y \in E \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\left(y, e_k\right)\right|^2 \le \|y\|^2$. Отсюда: $\left|\left(y, e_k\right)\right| \to 0$ при $k \to \infty$, т.е. $w - \lim\limits_{k\to\infty} e_k = \theta$.

По лемме 15.2 имеем: $\lambda \equiv \left(\hat{A}e_k, e_k\right) \to \left(\hat{A}\theta, \theta\right) = 0$, т.е. $\lambda = 0$, что противоречит условию.

2. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – отличные от нуля собственные значения $\hat{A}$, записанные *с учетом их кратностей* (*конечных по п. 1*), $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующие ОНС собственных векторов. Тогда вновь $\forall y \in E \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\left(y, x_k\right)\right|^2 \le \|y\|^2$. И тогда $\left|\left(y, x_k\right)\right| \underset{k\to\infty}{\to} 0 = \left|(y, \theta)\right|$, т.е. $\theta = w - \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Тогда: $\lambda_k = \left(\hat{A}x_k, x_k\right) \underset{k\to\infty}{\to} \left(\hat{A}\theta, \theta\right) = 0$, т.е. $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

15.5. Теорема Гильберта−Шмидта

Теорема 15.6. Пусть $\hat{A}$ – линейный, самосопряженный вполне непрерывный оператор в *E*. Тогда в *E* существует ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{n_0}$, $n_0 \le +\infty$, состоящая из собственных векторов оператора $\hat{A}$, отвечающих ненулевым собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_0}$, расположенным в порядке убывания модулей и с учетом их кратностей, такая, что:

1) $\forall x \in E \;\Rightarrow\; x = \sum\limits_{K=1}^{n_0} c_k e_k + x'$, где $c_k = \left(x; e_k\right)$ и $x' \in \operatorname{Ker} \hat{A}$;

2) $\hat{A}x = \sum\limits_{K=1}^{n_0} c_k \lambda_k e_k$.

В случае $n_0 = +\infty$ сходимость рядов понимается по норме пространства *E*.

<u>*Доказательство.*</u> По теореме 15.4 $\Rightarrow$ $\exists\Big(\lambda_1 : |\lambda_1| = \|\hat{A}\|$ и e_1: $\hat{A}e_1 = \lambda_1 e_1$, $\|e_1\| = 1\Big)$. Рассмотрим множество:

$$M_1^{\perp} = \left\{x \in E :\ \left(x, e_1\right) = 0\right\}$$

и покажем, что $M_1^{\perp}$ – линейное подпространство в *E*, *инвариантное* для оператора $\hat{A}$.

Линейность множества $M_1^{\perp}$ очевидна, а если $x \in M_1^{\perp}$, то

$$\left(\hat{A}x, e_1\right) = \left(x, \hat{A}e_1\right) = \lambda_1 \left(x, e_1\right) = 0 ,$$

т.е. и $\hat{A}x \in M_1^{\perp}$. Следовательно, $M_1^{\perp}$ – инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$ в *E*.

Рассмотрим *сужение* $\hat{A}$ на $M_1^{\perp}$. Тогда на $M_1^{\perp}$ оператор $\hat{A}$ также линейный, самосопряженный, вполне непрерывный.

Имеем:

$$\left\|\hat{A}\right\|_{M_1^{\perp}} = \sup_{\substack{x \in M_1^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| \le \lambda_1 .$$

По теореме 15.4 $\Rightarrow$ $\exists\left(e_2 \ne \theta\right) \in M_1^{\perp}$: $\hat{A}e_2 = \lambda_2 e_2$, где $\left|\lambda_2\right| = \left\|\hat{A}\right\|_{M_1^{\perp}} \le \left|\lambda_1\right|$, а $\left\|e_2\right\| = 1$.

Далее рассмотрим подпространство в *E*:

$$M_2^{\perp} = \left\{x \in E:\ \left(x, e_i\right) = 0,\quad i = 1, 2\right\}.$$

Очевидно $M_2^{\perp}$ – инвариантное в $M_1^{\perp} \subset E$ для оператора $\hat{A}$ линейное подпространство. Сужение оператора $\hat{A}$ на $M_2^{\perp}$ также является линейным, самосопряженным, вполне непрерывным оператором на $M_2^{\perp}$. Положим:

$$\left\|\hat{A}\right\|_{M_2^{\perp}} = \sup_{\substack{x \in M_2^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| \le \left|\lambda_2\right| \le \left|\lambda_1\right|.$$

Тогда по теореме 15.4 существует $\left(e_3 \ne \theta\right) \in M_2^{\perp}$: $\hat{A}e_3 = \lambda_3 e_3$, где $\left|\lambda_3\right| = \left\|\hat{A}\right\|_{M_2^{\perp}}$, а $\left\|e_3\right\| = 1$.

Продолжая этот процесс, на *n*-м шаге строим ОНС $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{n}$: $\hat{A}e_i = \lambda_i e_i$, где $\left|\lambda_1\right| \ge \left|\lambda_2\right| \ge \ldots \ge \left|\lambda_n\right| > 0$. Возможны *два случая*.

1. $\exists n_0 < +\infty: \ \forall\left(x \in M_{n_0}^{\perp}: \ \|x\|=1\right) \Rightarrow \left(\hat{A}x, x\right)=0$.

В этом случае

$$\|\hat{A}\|_{M_{n_0}^{\perp}} = \sup_{\substack{x \in M_{n_0}^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| = 0,$$

т.е. на $M_{n_0}^{\perp}$ $\hat{A} = \theta$ – *нулевой оператор*, а тогда $M_{n_0}^{\perp} = \operatorname{Ker}\widehat{A}$. Таким образом, в этом случае существует конечная ОНС $\{e_K\}_{K=1}^{n_0}$, состоящая из собственных векторов $\hat{A}$, отвечающих *ненулевым* собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_0}$: $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots \ge |\lambda_{n_0}| > 0$. При этом $\forall x \in E \Rightarrow$

$$x = \sum_{k=1}^{n_0} \left(x, e_k\right) + x', \ \text{ где } \ x' \in \operatorname{Ker}\widehat{A}; \quad \hat{A}x = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \left(x, e_k\right) e_k.$$

2. $\exists \{e_k\}_{k=1}^{\infty}: \ \left(e_k, e_j\right) = \delta_{kj}, \quad \hat{A}e_k = \lambda_k e_k$ и $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots \ge$ $\ge |\lambda_n| \ge \ldots > 0$ – ненулевые собственные числа оператора A, занумерованные с учетом кратностей.

Так как каждое (ненулевое) собственное значение имеет по теореме 15.5 *конечную* кратность, то различных собственных чисел бесконечно много. Тогда по теореме 15.5 $\Rightarrow$ $|\lambda_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Рассмотрим линейное подпространство в E:

$$M^{\perp} = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k^{\perp}.$$

Тогда

$$\forall n \Rightarrow \ \mathrm{M}^{\perp} \subset M_n^{\perp}; \quad \forall x \in M^{\perp} \Rightarrow \ \left(\hat{A}x, e_n\right) = \left(x, \hat{A}e_n\right) = \lambda_n \left(x, e_n\right) = 0;$$

т.е. $M^{\perp}$ – *инвариантное* для оператора $\hat{A}$ линейное подпространство в E.

Имеем: $\|\hat{A}\|_{M^{\perp}} = \sup\limits_{\substack{x \in M^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| \le \sup\limits_{\substack{x \in M_n^{\perp} \\ \|x\|=1}} \left|\left(\hat{A}x, x\right)\right| = |\lambda_{n+1}| \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

Таким образом, $\|\hat{A}\|_{M^{\perp}} = 0$, т.е. $\hat{A} = \hat{\Theta}$ на $M^{\perp}$, а $M^{\perp} = \operatorname{Ker}\widehat{A}$.

Тогда

$$\forall x \in E \Rightarrow \; x = x' + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x, e_k\right) e_k, \quad x' \in \operatorname{Ker} \widehat{A};$$

$$\hat{A}x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(x, e_k\right) e_k, \text{ где } \left|\lambda_k\right| \underset{k \to \infty}{\to} 0 .$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Построенная ОНС $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{n_0}$ называется *максимальной системой* собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям оператора $\hat{A}$.

2. Если в пространстве $M^{\perp} = \operatorname{Ker} \widehat{A}$ существует ОНБ $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{m_0}$, то, дополняя ОНС $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{n_0}$ системой $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{m_0}$, получим ОНБ во всем пространстве E.

15.6. Решение линейных уравнений с самосопряженным, вполне непрерывным оператором

В евклидовом пространстве E рассмотрим *уравнение Фредгольма второго рода* с вполне непрерывным, самосопряженным оператором $\hat{A}$:

$$x = \mu \hat{A} x + f, \tag{15.1}$$

где $\mu \in C$, а $f \in E$ – заданный элемент.

Пусть $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{n_0}$ – максимальная ОНС собственных векторов оператора $\hat{A}$, отвечающая собственным значениям $\left\{\lambda_k\right\}_{k=1}^{n_0}$, записанным с учетом кратностей в порядке убывания их модулей. По теореме Гильберта–Шмидта получаем: $x' \in \operatorname{Ker} \widehat{A}$ $\forall x \in E$, $x' \in \operatorname{Ker} \widehat{A} \Rightarrow$

$$x = x' + \sum_{k=1}^{n_0} \left(x, e_k\right) e_k \;; \qquad \hat{A}x = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \left(x, e_k\right) e_k .$$

Теперь уравнение (15.1) запишется в виде: $x = f + \mu \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \left(x, e_k\right) e_k$.

Умножая скалярно обе части этого равенства на e_n и обозначая $\left(x, e_n\right) = x_n$, получим, что для того, чтобы элемент $x \in E$ был бы решением (15.1), необходимо и достаточно выполнения равенств:

$$\left(1 - \mu\lambda_n\right)(x, e_n) = \left(f, e_n\right), \quad n = 1, 2, \ldots, n_0 . \tag{15.2}$$

Возможны *два случая*.

1. $\forall n \Rightarrow \; 1 - \mu\lambda_n \neq 0$. Тогда уравнение (15.1) *имеет и притом единственное решение,* удовлетворяющее соотношениям $(x, e_n) = \left(f, e_n\right) / \left(1 - \mu\lambda_n\right), \;\; n = 1, 2, \ldots, n_0$. Тогда решение задается формулой:

$$x = \mu \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\lambda_k \left(f, e_k\right)}{1 - \mu\lambda_k} e_k + f . \tag{15.3}$$

Отметим, что в этом случае *однородное уравнение*:

$$x = \mu \hat{A} x \tag{15.1$'$}$$

имеет *лишь нулевое решение*.

2. $\exists i: \; 1 - \mu\lambda_i = 0$, т.е. $\mu = \lambda_i^{-1}$. Пусть выбран наименьший из таких номеров. Тогда если λ_i – собственное значение *A кратности* s, т.е. $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+s-1}$, а $e_i, \; e_{i+1}, \ldots, \; e_{i+s-1}$ – соответствующие собственные векторы, то из (15.2) следует, что при $n = i$, $i+1, \; i+2, \ldots, \; i+s-1$ эти уравнения *разрешимы тогда и только тогда, когда выполнены равенства:* $\left(f, e_n\right) = 0$ для $n = i, \; i+1, \ldots,$ $i+s-1$. Это означает, что *правая часть ортогональна всем решениям* (15.1′) с $\mu = \lambda_i^{-1}$. При выполнении этого условия получаем, что

$$x_i = C_1, \; x_{i+1} = C_2, \ldots, \; x_{i+s-1} = C_s \; -$$

произвольные числа, а решение (15.1) имеет вид:

$$x = f + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, \ldots, i+s-1}}^{n_0} \frac{\lambda_k \left(f, e_k\right)}{\lambda_i - \lambda_k} e_k + C_1 e_i + \ldots + C_\Delta e_{i+s-1} \tag{15.4}$$

Замечание. Полученные формулы (15.3) и (15.4) называются *формулами Шмидта*. Попутно мы *доказали теоремы Фредгольма* в рассматриваемом случае.

§ 16. Интегральные операторы в $CL_2(G)$

В этом параграфе в евклидовом пространстве:

$$CL_2(G) = \left\{ x(t):\ x \in C\left(\overline{G}\right),\ \|x\|_{L_2} = \left(\int\limits_G |x(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

где $G \subset R^n$ – ограниченная область, рассматриваются операторы $\hat{K}$ и $\hat{K}_\alpha$:

$$\left(\hat{K}x\right)(t) = \int\limits_G K(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau\,, \tag{16.1}$$

$$\left(\hat{K}_\alpha x\right)(t) = \int\limits_G \frac{K(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}\, x(\tau)\, d\tau\,, \tag{16.2}$$

где, как и раньше, $K(t,\tau) \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$, $0 < \alpha < n$. Ранее было доказано, что $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$: $C\left(\overline{G}\right) \to C\left(\overline{G}\right)$, а тем более и $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$: $CL_2(G) \to CL_2(G)$. Отметим, что $CL_2(G)$ – *неполное* евклидово пространство.

16.1. Самосопряженность интегральных операторов

Утверждение 16.1. Оператор $\hat{K}^*\left(\hat{K}_\alpha^*\right)$ существует и является интегральным оператором с ядром $K^*(t,\tau) = \overline{K(\tau,t)}$ $\left(K_\alpha^*(t,\tau) = \dfrac{\overline{K(\tau,t)}}{|t-\tau|^\alpha} \right)$.

Доказательство. Для любых x, y из пространства $CL_2(G)$ выполняется:

$$\left(\hat{K}x, y\right) = \int\limits_G \left(\hat{K}x\right)(t)\overline{y(t)}\,dt = \int\limits_G \left(\int\limits_G K(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau\right)\times$$

$$\times\overline{y(t)}\,dt = \int\limits_G x(\tau)\left(\overline{\int\limits_G \overline{K(t,\tau)}\,y(\tau)\,d\tau}\right)d\tau = \left(x, \hat{K}^* y\right),$$

где $$\left(\hat{K}^* x\right)(t) = \int\limits_G \overline{K(t,\tau)}\,y(\tau)\,d\tau = \int\limits_G K^*(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\,.$$

Таким образом, $K^*(t,\tau) = \overline{K(\tau,t)}$. Аналогично доказывается и для оператора $\hat{K}_\alpha$.

Следствие. Оператор $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$ *самосопряжен* в том и только в том случае, если $K(t,\tau) = \overline{K(\tau,t)}$, т.е. ядро $K(t,\tau)$ *эрмитово симметрично*.

16.2. Полная непрерывность интегральных операторов

Теорема 16.1. Операторы $\hat{K}$ и $\hat{K}_\alpha$ являются *вполне непрерывными* операторами в $CL_2(G)$.

Доказательство. Так как $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C\left(\overline{G}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\|x_n - x_m\right\|_{L_2} = \left\{\int\limits_G \left|x_n(t) - x_m(t)\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\|x_n - x_m\right\|_C \sqrt{\mu(G)}\,,$$

то всякое множество, относительно компактное в $C\left(\overline{G}\right)$, тем более относительно компактно в $CL_2(G)$. Таким образом, достаточно показать, что $\hat{K}$ переводит *всякое ограниченное в* $CL_2(G)$ *множество в множество относительно компактное в* $C\left(\overline{G}\right)$.

Пусть $B \subset CL_2(G)$, такое, что $\exists M > 0$: $\forall x \in B \Rightarrow \ \|x\|_{L_2} \le M$. Обозначим $L = \sup\limits_{t,\tau \in G} |K(t,\tau)|$. Тогда $\forall x \in B$ справедливы оценка:

$$\left|\left(\hat{K}x\right)(t)\right| \le \int\limits_G |K(t,\tau)|\,|x(\tau)|\,d\tau \le L\int\limits_G |x(\tau)|\cdot 1 d\tau \le$$

$$\le L\sqrt{\mu(G)}\,\|x\|_{L_2} \le ML\sqrt{\mu(G)},$$

а тогда и $\left\|\hat{K}x\right\|_C \le ML\sqrt{\mu(G)} \quad \forall x \in B$, т.е. $\hat{K}B$ – *равномерно ограниченное* в $C\left(\overline{G}\right)$ множество.

Далее: $\left|\left(\hat{K}x\right)(t_1) - \left(\hat{K}x\right)(t_2)\right| \le \int\limits_G \left|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)\right|\,|x(\tau)|\,d\tau \le$

$$\le \left\{\int\limits_G \left|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} \|x(\tau)\|_{L_2}.$$

В силу равномерной непрерывности $K(t,\tau)$ на $\overline{G}\times\overline{G}$ получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall\left((t_1,\tau),(t_2,\tau) \in \overline{G}\times\overline{G}: \ |t_1 - t_2| < \delta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)\right| < \frac{\varepsilon}{M\sqrt{\mu(G)}}.$$

Но тогда для таких $(t,\tau) \Rightarrow \sup\limits_{x\in B}\left|\left(\hat{K}x\right)(t_1) - \left(\hat{K}x\right)(t_2)\right| < \varepsilon$, т.е. $\hat{K}B$ равностепенно непрерывно. Следовательно, множество $\hat{K}B$ относительно компактно в $C\left(\overline{G}\right)$, а тогда и в $CL_2(G)$. Поэтому оператор $\hat{K} : CL_2(G) \to CL_2(G)$ – вполне непрерывный оператор.

<u>*Упражнение*</u>. Доказать теорему для оператора $\hat{K}_\alpha$.

16.3. Свойства вполне непрерывного, самосопряженного интегрального оператора в $CL_2(G)$

В качестве следствий полученных ранее результатов сформулируем следствие свойства операторов $\hat{K}$ и $\hat{K}_\alpha$ в случае, когда $K(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}\in C\left(\overline{G}\times\overline{G}\right)$.

Утверждение 16.2. Если $K(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}\in C\left(\overline{G}\times\overline{G}\right)$, то для интегрального оператора $\hat{K}$ (и аналогично для $\hat{K}_\alpha$) справедливы следующие утверждения.

1. Оператор $\hat{K}$ имеет по крайней мере одно собственное значение λ, удовлетворяющее равенству:

$$|\lambda|=\sup_{\|x\|_{L_2}=1}\left|\int_G\int_G K(t,\tau)\,x(\tau)\,\overline{x(t)}\,dt\,d\tau\right|.$$

Это собственное значение является наибольшим по модулю среди всех собственных значений оператора $\hat{K}$.

2. Собственные числа оператора $\hat{K}$ действительны. Собственные функции, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

3. Если $\lambda_k\neq 0$ – собственное значение, то $\mu_k=\lambda_k^{-1}$ называется *характеристическим значением* $\hat{K}$. Тогда каждое характеристическое число имеет *конечную кратность*.

4. На любом отрезке $[a,b]$ лежит *конечное число* характеристических чисел оператора $\hat{K}$. Если оператор $\hat{K}$ имеет бесконечно много характеристических чисел μ_k, то $\mu_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

5. ***Теорема 16.2 (Гильберта–Шмидта).*** Существует ОНС $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n_0}$, состоящая из собственных функций $\hat{K}$, отвечающих характеристическим значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_0}$, такая, что

$$\forall x\in CL_2(G)\Rightarrow\ x=\sum_{k=1}^{n_0}\left(x,\varphi_k\right)\varphi_k+x'(t),$$

$$\left(\hat{K}x\right)(t)=\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{\mu_k}\left(x,\varphi_k\right)\varphi_k\ ,$$

где $x'(t)\in\operatorname{Ker}\widehat{K}$, $n_0\le+\infty$ (если $n_0=+\infty$, то ряды сходятся в $CL_2(G)$).

6. Получим одно *усиление* теоремы Гильберта–Шмидта для интегрального оператора $\hat{K}$.

Определение 16.1. Функция f называется *истокообразно представимой* через ядро $K(t,\tau)$, если $\exists h\in CL_2(G)$:

$$f(t)=\int_G K(t,\tau)h(\tau)\,d\tau\ .$$

Теорема 16.3 (Гильберта). Если f истокообразно представима через эрмитово симметричное, непрерывное ядро $K(t,\tau)$, то ее ряд Фурье по максимальной ОНС собственных функций оператора $\hat{K}$ сходится к f *абсолютно* и *равномерно на* $\overline{G}$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – максимальная ОНС собственной функции оператора $\hat{K}$, отвечающая характеристическим значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. По теореме Гильберта–Шмидта получаем, что

$$\forall h\in CL_2(G)\Rightarrow\ h(t)=h_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(h,\varphi_k\right)\varphi_k(t)\ ,\quad h_0\in\operatorname{Ker}\widehat{K}\ ,$$

$$\left(\hat{K}h\right)(t)=f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(h,\varphi_k\right)}{\mu_k}\varphi_k(t)\ ,\tag{16.1}$$

где ряд в (16.1) сходится к f в $CL_2(G)$. Докажем, что на самом деле сходимость ряда (16.1) равномерная на $\overline{G}$ (и абсолютная). Так как

$$\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\mu_k}=\int_G\overline{K(t,\tau)}\ \overline{\varphi_k(\tau)}\,d\tau$$

суть *коэффициенты Фурье* функции $\overline{K(t,\tau)}$ по ОНС $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, то согласно неравенству Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\mu_k}\right|^2 \le \int_G \left|\overline{K(t,\tau)}\right|^2 d\tau, \quad \forall t \in \overline{G},$$

и тогда:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|\frac{\varphi_k(t)^2}{|\mu_k|} \le \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(t)|^2}{\mu_k^2}\right\} \le$$

$$\le \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_G |K(t,\tau)|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in G}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|\frac{|\varphi_k(t)|}{|\mu_k|} \le \sup_{t\in\overline{G}}\int_G |K(t,\tau)|^2 d\tau \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|(h,\varphi_k)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

т.е. ряд (16.1) сходится абсолютно и равномерно на $\overline{G}$.

16.4. Положительно определенные операторы

Определение 16.2. Оператор A в евклидовом пространстве E называется *положительно (неотрицательно) определенным* если

$$\forall x \in E \Rightarrow \ (Ax,x) > 0 \quad (\ \forall x \in E \Rightarrow \ (Ax,x) \ge 0 \ ).$$

Определение 16.3. *Ядро* $K(t,\tau)$ $\left(K_\alpha(t,\tau)\right)$ интегрального оператора $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$ называется *положительно определенным*, если $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right)$ – положительно определенный оператор в $CL_2(G)$.

Теорема 16.4. Пусть E – евклидово пространства над полем комплексных чисел. Тогда оператор $\hat{A}$ *самосопряжен* в E $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E \Rightarrow \left(\hat{A}x,x\right) \in R$.

Доказательство. 1. Если $\hat{A}$ самосопряжен в *E*, то $\forall x \in E \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\hat{A}x, x\right) = \left(x, \hat{A}x\right) = \left(\overline{\hat{A}x, x}\right) \Rightarrow \left(\hat{A}x, x\right) \in R$.

2. Обратно, если $\forall z \in E \Rightarrow \left(\hat{A}z, z\right) \in R$, то

$$\mathrm{Re}\left[\left(\hat{A}y, x\right) - \left(\hat{A}x, y\right)\right] = \mathrm{Re}\frac{1}{i}\left[\left(\hat{A}(x+iy), x+iy\right) - \left(\hat{A}x, x\right) - \left(\hat{A}x, y\right)\right] = 0;$$

т.е. $\mathrm{Re}\left(\hat{A}y, x\right) = \mathrm{Re}\left(\hat{A}x, y\right)$.

$$\mathrm{Im}\left[\left(\hat{A}y, x\right) + \left(\hat{A}x, y\right)\right] = \mathrm{Im}\left[\left(\hat{A}(x+y), x+y\right) - \left(\hat{A}x, x\right) - \left(\hat{A}y, y\right)\right] = 0,$$

т.е. $\mathrm{Im}\left(\hat{A}y, x\right) = -\mathrm{Im}\left(\hat{A}x, y\right)$.

Отсюда $\forall x,\ y \in E \Rightarrow$ $\left(\hat{A}y,\ x\right) = \mathrm{Re}\left(\hat{A}y,\ x\right) + i\,\mathrm{Im}\left(\hat{A}y,\ x\right) =$ $= \mathrm{Re}\left(\hat{A}x, y\right) - i\,\mathrm{Im}\left(\hat{A}x, y\right) = \left(y, \hat{A}x\right)$, т.е. $\hat{A} = \hat{A}^*$.

Теорема 16.5. Если непрерывное ядро $K(t,\tau)$ $\left(K_\alpha(t,\tau)\right)$ положительно определено, то:

1) zдро эрмитово симметрично, т.е. $K(t,\tau) = \overline{K(\tau,t)}$;

2) $K(t,t) \geq 0$ для $\forall t \in \overline{G}$.

Доказательство. 1. Следует из теоремы 16.4, так как $\hat{A}$ в этом случае $\hat{K}\left(\hat{K}_\alpha\right) -$ самосопряженный оператор.

2. Так как $K(t,t) = \overline{K(t,t)}$, то $K(t,t) \in R$ для $\forall t \in \overline{G}$.

Допустим, что $\exists t_0 \in \overline{G}:\ K\left(t_0, t_0\right) < 0$. Тогда в силу непрерывности $K(t,\tau)$ можно считать, что $t_0 \in G$, т.е. t_0 – внутренняя точка, и что

$$\exists U_\delta\left(t_0\right) = \left\{t:\ \left|t - t_0\right| < \delta\right\}:\ \forall (t,\tau) \in U_\delta\left(t_0\right) \Rightarrow\ \mathrm{Re}\,K(t,\tau) < 0.$$

Тогда берем $f \in C\left(\overline{G}\right)$: $f(t) > 0$ в $U_\delta\left(t_0\right)$ и $f(t) \equiv 0$ вне $\overline{U_\delta\left(t_0\right)}$. Тогда

$$\left(\hat{K}f, f\right) = \int_G \int_G K(t,\tau) f(t) \overline{f(\tau)}\, dt\, d\tau = \mathrm{Re}\int_G \int_G K(t,\tau) f(t) f(\tau)\, dt\, d\tau =$$

$$= \int_G \int_G \mathrm{Re}\,K(t,\tau) f(t) f(\tau)\, dt\, d\tau < 0,$$

что противоречит положительной определенности ядра $K(t,\tau)$. Следовательно, $K(t,t) \geq 0$ для всех $t \in \overline{G}$.

16.5. Билинейное разложение эрмитово симметричного ядра

Лемма 16.1 (Дини). Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ − ограниченная область, а $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что:

1) $\forall n \;\Rightarrow\; f_n \in C(\overline{G})$;

2) $\forall x \in \overline{G} \;\Rightarrow\; \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонны по n;

3) $\forall x \in \overline{G} \;\Rightarrow\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in C(\overline{G})$.

Тогда $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $\overline{G}$.

Доказательство. Пусть

$$G_1 = \left\{ x \in \overline{G} : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \uparrow,\ \textit{т.е.}\, f_n(x) \leq f_{n+1}(x),\ n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Тогда в силу непрерывности $f_n(x)$ на $\overline{G} \Rightarrow G_1 = \overline{G}_1$ – замкнутое множество. Докажем, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $\overline{G}_1$. Обозначим $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) \geq 0$, очевидно $\varphi_n(x) \downarrow 0$, $\varphi_n \in C(\overline{G}_1)$. Положим $\alpha_n = \sup\limits_{x\in\overline{G}_1} \varphi_n(x)$, очевидно также, что $\alpha_n \downarrow 0$.

Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha > 0$. Тогда, так как

а) $\forall n \;\Rightarrow\; \exists x_n \in \overline{G}_1 : \alpha_n = \sup\limits_{x\in\overline{G}_1} \varphi_n(x) = \varphi_n(x_n) \downarrow$;

б) $\overline{G}_1$ ограничена и замкнута, то

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \Rightarrow x_{n_k} \to x_0 \in \overline{G}_1,\ \varphi_{n_k}(x_{n_k}) = \alpha_{n_k} \searrow \alpha > 0.$$

С другой стороны, так как $x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$, то из следующей двойной последовательности видим:

$$\alpha_{n_2} \quad \ldots \quad \geq \quad \alpha_{n_k} \quad \ldots;$$

$$\varphi_{n_1}(x_{n_1}),\ \varphi_{n_1}(x_{n_2}) \dots \varphi_{n_1}(x_{n_k}) \dots \ \to\ \varphi_{n_1}(x_0) \ge \alpha;$$
$$\varphi_{n_2}(x_{n_1}),\ \varphi_{n_2}(x_{n_2}) \dots \varphi_{n_2}(x_{n_k}) \dots \ \to\ \varphi_{n_2}(x_0) \ge \alpha\ ;$$
$$\dots;$$
$$\varphi_{n_k}(x_{n_1}),\ \varphi_{n_k}(x_{n_2}) \dots \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \dots \ \to\ \varphi_{n_k}(x_0) \ge \alpha,$$
$$\downarrow$$
$$0$$

т.е. по строкам $\varphi_{n_k}(x_{n_j}) \to \varphi_{n_k}(x_0) \ge \alpha > 0$ для любого n_k, а с другой стороны, $\varphi_{n_k}(x_0) \to 0$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sup\limits_{x\in\bar{G}_1}\varphi_n(x)\right\} = 0$, т.е. $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $\bar{G}_1$. Аналогично доказывается, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $\overline{G \setminus G_1}$.

<u>Теорема 16.6.</u> Эрмитово симметричное, непрерывное ядро $K(t,\tau)$ разлагается в билинейный ряд по своим собственным функциям:

$$K(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k}, \tag{16.2}$$

сходящийся в $CL_2(G)$ равномерно по τ в $\bar{G}$, что означает

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\bar{G}}\left\| K(\cdot,\tau) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\cdot)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k}\right\|_{L_2(G)} = 0. \tag{16.3}$$

<u>*Доказательство.*</u> $\forall \tau \in \bar{G} \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ (K(\cdot,\tau),\varphi_k)_{L_2(G)} = \int_G K(t,\tau)\overline{\varphi_k(t)}dt = \overline{\int_G K(\tau,t)\varphi_k(t)dt} = \frac{\varphi_k(\tau)}{\mu_k}\ -$$

коэффициенты Фурье. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье, получаем:

$$\left\| K(\cdot,\tau) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(\cdot)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k} \right\|^2_{L_2(G)} = \int_G |K(t,\tau)|^2 dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |\varphi_k(\tau)|^2, \ \lambda_k = \frac{1}{\mu_k}.$$

Дополняя ортонормированную систему функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ до ортонормированного базиса в $CL_2(G)$ элементами *из ядра оператора* $\hat{K}$, получим, что $\forall \tau \in \overline{G} \Rightarrow \int_G |K(t,\tau)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k(\tau)|^2$, где при всех добавленных элементах собственные числа $\lambda = 0$.

Это означает, $\forall \tau \in \overline{G} \Rightarrow \left(\int_G |K(t,\tau)|^2 dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |\varphi_k(\tau)|^2 \right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, и тогда выполняется следующее:

1) $\forall \tau \in \overline{G} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k^2} = f_n(\tau) \uparrow$ по n;

2) $f_n(\tau) \in C(\overline{G})$ для $\forall n$;

3) $\forall \tau \in \overline{G} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\tau) = \int_G |K(t,\tau)|^2 dt \in C(\overline{G})$.

Используя лемму Дини, получаем, что сумма $\sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k^2}$ сходится равномерно на $\overline{G}$ к интегралу $\int_G |K(t,\tau)|^2 dt$, и тогда справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\tau\in\overline{G}} \left\| K(\cdot,\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\cdot)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k} \right\|_{L_2(G)} = 0.$$

<u>Теорема 16.7 (Мерсера).</u> Если ядро $K(t,\tau)$ непрерывно на $\overline{G} \times \overline{G}$, эрмитово симметрично и положительно определено, то его билинейный ряд (16.2) сходится абсолютно и равномерно к $K(t,\tau)$ на $\overline{G} \times \overline{G}$.

Доказательство. По теореме 16.6 имеем $K(t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k}$ и этот ряд сходится в $CL_2(G)$ равномерно по τ в $\overline{G}$.

Теперь у нас $0<\mu_1\le\mu_2\le\ldots\le\ldots$. Далее, имеем: $\forall\tau\in\overline{G}\Rightarrow$ $\Rightarrow 0\le K(\tau,\tau)\le M=\text{const}$, $K(\tau,\tau)\in C(\overline{G})$. Тогда все ядра вида $K_n(t,\tau)=K(t,\tau)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k}$ также непрерывны, эрмитово симметричны и положительно определены. Согласно теореме 16.5

$$K_n(\tau,\tau)=K(\tau,\tau)-\sum_{k=1}^{n}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k}\ge 0\,,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k}\le K(\tau,\tau)\le \mathrm{M}\,,$$

и, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k}$ сходится при $\forall\tau\in\overline{G}$. Теперь, используя неравенство Коши–Буняковского, получаем:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k}\le\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(t)|^2}{\mu_k}\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k}\right\}^{1/2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\overline{G}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(\tau)}}{\mu_k}\le M\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(\tau)|^2}{\mu_k}\right\}^{1/2}\underset{n\to\infty}{\to}0 \text{ для } \forall\tau\in\overline{G}.$$

Получили, что ряд (16.2) при $\forall\tau\in\overline{G}$ сходится равномерно по t на $\overline{G}$. Но тогда в (16.2) *можно положить* $t=\tau$ и получаем справедливость утверждения теоремы.

III. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 17. Основные определения, свойства интеграла Лебега

<u>Определение 17.1</u>. Множество $A \subset R^n$ имеет меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ множество может быть покрыто шарами с суммой объемов, не превышающей ε.

<u>Упражнение.</u>

1. Доказать, что в этом случае число шаров не более, чем счетно.
2. Ограниченная, кусочно-гладкая поверхность S имеет меру нуль.

<u>Определение 17.2.</u> Говорят, что некоторое свойство выполнено почти всюду (п.в.) в области G, если мера множества точек, в которых это свойство не имеет места, равна нулю.

<u>Определение 17.3.</u> Функция называется кусочно-непрерывной в R^n, если существует конечное или счетное число областей $\{G_k\}_{k=1}^{n0}, n_0 \le +\infty$, в которых функция $f \in C\left(\overline{G_k}\right)$ и выполняется следующее:

1) $G_k \cap G_m \neq \varnothing,\ k \neq m;$

2) любой шар $K_R(M)$ покрывается конечным числом замкнутых областей $\overline{G_k}$.

Функция называется кусочно-непрерывной в $\overline{G_k} \subset R^n$, если доопределенная нулем в $R^n \setminus \overline{G}$ она остается кусочно-непрерывной в R^n.

<u>Определение 17.4</u>. Кусочно-непрерывную функцию будем называть финитной, если она равна тождественно нулю вне некоторого шара.

Очевидно, что если рассматривается финитная, кусочно-непрерывная функция, то число областей G_k в определении 17.3 можно взять конечным.

Введем обозначения:

$\operatorname{supp} f(x) = \left\{x \in R^n : f(x) \neq 0\right\}$ – *носитель функции f*;

$\chi_A(x)=\begin{cases}1, x\in A;\\ 0, x\notin A\end{cases}$ – характеристическая функция множества A;

$Q\left(\overline{G}\right)$ – множество всех кусочно-непрерывных в $\overline{G}$ функций;

$Q_0\left(R^n\right)$ – множество всех кусочно-непрерывных в R^n функций, имеющих компактный носитель, т.е. финитных.

Определение 17.5. Заданная во всем R^n функция называется измеримой, если существует последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset Q(R^n)$, такая, что $f \overset{п.в.}{=} \lim\limits_{k\to\infty} f_k$.

Множество $A\subset R^n$ называется измеримым, если функция $\chi_A(x)$ измерима.

Заданная на множестве A функция $f(x)$ называется измеримой, если множество A измеримо, а доопределенная нулем на $R^n\setminus A$ функция f также остается измеримой.

Упражнение.

1. Если f, g и измеримые в R^n функции, то cf, $f+g$, fg, $|f|$, $\max(f, g)$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(x)\neq 0)$ – также измеримые в R^n функции.

2. Если A, B – измеримые множества, то $A\bigcup B, A\cap B, A\setminus B, R^n\setminus A = CA$ – также измеримые множества.

3. Если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на A функций и $f_k\to f$ п.в. на A, то f измерима на A.

Определение 17.6. Пусть $f(x)$ – определенная на всем R^n неотрицательная, измеримая и п.в. конечная функция и неубывающая последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset Q_0(R^n)$ таковы, что:

а) $f_k\to f$, п.в.;

б) $\exists \lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{R^n} f_k(x)dx<\infty$.

Тогда функция называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой), а число $\int\limits_{R^n} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{R^n} f_k(x)dx$ ее интегралом Лебега.

<u>Определение 17.7.</u> Для любой определенной в R^n, измеримой и почти всюду конечной функции $f(x)$, положим

$$f^+(x) = \max(f(x),0), f^-(x) = \max(-f(x),0).$$

Тогда

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), | f(x) |= f^+(x) - f^-(x).$$

Функцию $f(x)$ *назовем* интегрируемой по Лебегу, если f^+, f – интегрируемые функции и по определению

$$\int\limits_{R^n} f(x)dx = \int\limits_{R^n} f^+(x)dx - \int\limits_{R^n} f^-(x)dx.$$

<u>Определение 17.8</u>. Функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на измеримом множестве A, если функция $f(x)\chi_A(x)$ интегрируема по Лебегу, а число

$$\int\limits_{R^n} f(x)\chi_A(x)dx = \int\limits_A f(x)dx$$

называется интегралом Лебега от $f(x)$ по множеству A.

Из определения 17.6 следуют свойства.

1. Функции $f(x)$ и $|f(x)|$ одновременно интегрируемы по Лебегу и при этом

$$\left| \int\limits_{R^n} f(x)dx \right| \le \int\limits_A | f(x) | dx.$$

2. Интеграл Лебега линеен.

Более сложно устанавливаются следующие свойства.

3. Определение интеграла корректно, т.е. не зависит от выбора в пункте 1 определения 17.6 последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Q(G)$, удовлетворяющей перечисленным свойствам.

4. Всякая ограниченная, измеримая функция, определенная во всем R^n, интегрируема по любому ограниченному, измеримому множеству A. В частности, для любого ограниченного, измеримого множества A определен интеграл

$$\int_A dx = \int_{R^n} \chi_A(x)dx = \mu A,$$

называемый мерой Лебега (измеримого) множества A.

5. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы по Риману на A (возможно в несобственном смысле), то $f(x)$ интегрируема по Лебегу и оба интеграла совпадают.

Пример. 17.1. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рациональное из } [0, 1]; \\ 0, x - \text{иррациональное из } [0, 1] \end{cases}$$

не интегрируема по Риману, но интегрируема по Лебегу и ее интеграл Лебега равен нулю.

В самом деле, неубывающая последовательность

$$f_k(x) \overset{\text{п.в.}}{\equiv} 0$$

на R^1 сходится к $D(x)\chi_{[0,1]}(x)$, равной тождественно нулю вне [0, 1], так как мера множества всех рациональных точек отрезка равна нулю.

По определению, если $A = [0, 1]$, то

$$\int_0^1 D(x)dx = \int_{R^1} D(x)\chi_A(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{R^1} f_k(x)dx = 0.$$

6. Аддитивное свойство интеграла. Если

$$A = \bigcup_n A_n, A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \text{, то } \int_A f(x)dx = \sum_n \int_{A_n} f(x)dx,$$

причем из существования интеграла в левой части вытекает существование интегралов и абсолютная сходимость ряда в правой части.

7. Если $A = \bigcup_n A_n, A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и ряд $\sum_n \int_{A_n} |f(x)|dx$ сходится, то функция f интегрируема на множестве A и

$$\int_A f(x)dx = \sum_n \int_{A_n} f(x)dx.$$

8. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Если f суммируема на A, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall e \in A, \mu(e) < \delta : \left| \int_e f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Наконец, приведем три теоремы, играющие важную роль в теоретических вопросах. В дальнейшем A – измеримое множество.

9. ***Теорема 17.2 (Лебега).*** Если $f_k \to f$ п.в. на A и при всех n выполнено неравенство $|f_n(x)| \le \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – интегрируемая на A функция, то предельная функция $f(x)$ также интегрируема на множестве A и $\int_A f_k(x)dx \to \int_A f(x)dx,\ k \to \infty.$

10. ***Теорема 17.3 (Беппо Леви).*** Пусть п.в. на A выполнены неравенства

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_k(x) \le \ldots,$$

причем функции $f_k(x)$ интегрируемы и их интегралы ограничены в совокупности. Тогда почти всюду на A существует конечный предел $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$, причем функция f интегрируема на A и

$$\int_A f_k(x)dx \to \int_A f(x)dx, k \to \infty.$$

11. ***Теорема 17.4 (Фату).*** Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ − последовательность измеримых, неотрицательных на множестве A функций – такова, что:

а) $f_k \to f$ п.в. на A;

б) $\exists M > 0 \forall k : \int_A f_k(x)dx \le M$.

Тогда f также интегрируема на A и $\int_A f(x)dx \le M$.

Определение 17.9. $f_k \to f$ по мере, если

$$\forall \sigma > 0 : \lim_{k\to\infty} \mu\{x : |f_k(x) - f(x)| \ge \sigma\} = 0.$$

Между сходимостью по мере и п.в. имеется следующая связь.

Теорема 17.5.

1. Если $f_k \to f$ п.в. на A, то $f_k \to f$ по мере.

2. Если $f_k \to f$ по мере, то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$, сходящаяся п.в. на A к $f(x)$.

Имеется связь между сходимостью п.в. и равномерной сходимостью.

Теорема 17.6 (Егорова). Пусть A – множества конечной меры и последовательность измеримых функций $f_k \to f$ п.в. на A. Тогда $\forall \delta > 0 \exists A_\delta \subseteq A$ измеримое и такое, что:

1) $\mu(A_\delta) > \mu(A) - \delta$;

2) $f_k(x) \to f(x)$ равномерно на A_δ.

17.1. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры

Определение 17.10. Последовательность $\{A_k\}$ назовем исчерпывающей множество A, если все A_k – измеримые, $\mu A_k < \infty$ и выполняется следующее:

1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \ldots$;

2) $A = \bigcup\limits_k A_k$.

Определение 17.11. Пусть f определена на A. Функцию f назовем суммируемой на A, если она суммируема на каждом измеримом подмножестве множества A конечной меры и если для любой последовательности $\{A_k\}$, исчерпывающей A, существует

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{A_k} f(x)dx \overset{def}{=} \int\limits_A f(x)dx,$$

конечный и не зависящий от выбора исчерпывающей последовательности. Этот предел называется интегралом Лебега от по A.

Отметим, что $|f|$ в этом случае также суммируема на A.

Пример 17.2. Интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ существует (равен $\pi/2$) как несобственный интеграл Римана, но не существует (даже как несобственный) как интеграл Лебега.

§ 18. Пространство Лебега

<u>Определение 18.1</u>. Пусть $G \subseteq R^n$ – измеримое множество. Тогда $L_p(G) = \{f$ – измеримая в G функция: $\| f \|_{L_p(G)} < +\infty\}$, где

$$| f \|_{L_p(G)} = \| f \|_p == \left\{ \int_G | f(x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

<u>Теорема 18.1.</u> Для любого $p \in [1, +\infty), L_p(G)$ – нормированное пространство с нормой $\|.\|_p$.

<u>*Доказательство*</u>. Проверим, что $\| \cdot \|_p$ удовлетворяет всем свойствам нормы.

1. $\| f \|_p \geq 0, \| f \|_p = 0 \Leftrightarrow f = \theta$ в $L_p(G)$. Равенство $\| f \|_p = 0$ и является определением нуля в пространстве $L_p(G)$.

2. $\| cf \|_p = | c | \| f \|_p$.

3. Докажем, что справедливо неравенство треугольника: $\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$, которое в данном случае называется неравенством Минковского.

<u>Лемма 18.1 (неравенство Гельдера).</u> Пусть $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$ Тогда, если $f(x)g(x)$ – суммируемая функция, то

$$\int_G | f(x)g(x) | \, dx \leq \| f \|_p \| g \|_q .$$

<u>*Доказательство.*</u> Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \dfrac{t^p}{p} + \dfrac{t^{-q}}{q}$, определенную на $(0, +\infty)$. Так как

$$\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1} \begin{cases} < 0, & t \in (0, 1); \\ > 0, & t \in (1, +\infty), \end{cases}$$

то t=1 – точка минимума функции $\varphi(t)$. Положим $t = a^{1/q} b^{1/p}$, где $a > 0,$, $b > 0$, из неравенства $\varphi(t) \geq 1$ получаем

$$1\le \frac{1}{p}a^{p/q}b^{-1}+\frac{1}{q}b^{q/p}a^{-1}, ab\le \frac{1}{p}a^{p/q+1}+\frac{1}{q}b^{q/p+1}=a^{p/q}+b^{q/p}.$$

Таким образом, для любого $p\in(1,+\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ будет выполнено $ab\le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ для любых $a,b\in R_+$. Теперь, полагая $a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$, имеем: $\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$. Интегрируя это неравенство по области G, получим нужное нам неравенство Гельдера $\int\limits_G |f(x)g(x)|\,dx\le\|f\|_p\|g\|_q$.

<u>Замечание 18.1.</u> Если $p=2$, то получаем неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

<u>Следствие</u>. Если $G=R^n, K_i-$ не пересекающиеся единичные кубы, $i=1,2,...,N$, а функции f, g таковы, что

$$f(x)=\begin{cases} a_i,\ x\in K_i;\\ 0,\ x\notin\bigcup\limits_{i=1}^N K_i,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} b_i,\ x\in K_i;\\ 0,\ x\notin\bigcup\limits_{i=1}^N K_i,\end{cases}$$

то неравенство Гельдера превращается в следующее неравенство Гельдера для сумм:

$$\sum_{i=1}^N |a_i b_i|\le\left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^N |b_i|^q\right)^{1/q}.$$

<u>Доказательство</u> (неравенства Минковского). Если $p=1$, то неравенство очевидно. Пусть $p>1$. Тогда из неравенства Гельдера для сумм (при $N=2,\ a_1=f,\ a_2=g,\ b_1=b_2=1$) получаем:

$$|f(x)+g(x)|\le 2^{1/q}(|f(x)|^p+|g(x)|^p)^{1/p}.$$

Так как $\frac{p-1}{p}=\frac{1}{q}, q(p-1)=p$, то отсюда

$$\left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^q\le 2^{p-1}(|f(x)|^p+|g(x)|^p),$$

получили

$$|f(x)+g(x)|^{p-1} \in L_q(G).$$

Но тогда, так как

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1},$$

то, интегрируя по G и применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$\int_G |f(x)+g(x)|^p\,dx \le$$

$$\le \int_G |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_G |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \le$$

$$\le \left(\left(\int_G |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} + \left(\int_G |g(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \right) \left(\left(\int_G |f(x)+g(x)|^{\frac{q}{p-1}}\,dx \right)^{\frac{p-1}{q}} \right) =$$

$$= \left(\left(\int_G |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} + \left(\int_G |g(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \right) \left(\left(\int_G |f(x)+g(x)|^p\,dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right),$$

откуда и получаем нужное неравенство:

$$\left(\int_G |f(x)+g(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_G |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_G |g(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда также следует линейность $L_p(G), p \ge 1$.

<u>Определение 18.2.</u> Нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется полным, если всякая фундаментальная по норме $\|\cdot\|$ последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в X к некоторому элементу $f \in X$.

<u>Теорема 18.2 (Рисса–Фишера).</u> Пространство $L_p(G)$ – полное. Здесь $1 \le p < \infty, G \subseteq R^n$ – измеримое множество.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальная в $L_p(G)$ последовательность, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n,m > N : \| f_n - f_m \|_p < \varepsilon$. Выбираем номера $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$ таким образом, чтобы $\forall n > m_k : \| f_n - f_{m_k} \|_p < 2^{-k}$, откуда, в частности, следует, что $\| f_{m_{k+1}} - f_{m_k} \|_p < 2^{-k}$. Если $G_1 \subseteq G$ – любое измеримое множество

конечной меры, то из неравенства Гельдера получаем, что $\int\limits_{G_1} | f_{m_{k+1}}(x) + f_{m_k}(x)|^p \, dx \le \| f_{m_{k+1}} + f_{m_k} \|_p \left(\mu(G_1)\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-k} \left(\mu(G_1)\right)^{\frac{1}{q}}$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{G_1} | f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)| \, dx$ сходится. Отсюда по теореме Беппо-Леви и теореме Фату следует, что функции $f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x) \right)$ будут сходиться п.в. на G_1 к некоторой интегрируемой на G_1 функции. Так как $G_1 \subseteq G$ – произвольное измеримое множество конечной меры, то получаем, что $f_{m_k}(x)$ п.в. на G стремится к некоторой функции $f(x)$ (интегрируемой на G локально).

Далее, так как $\| f_{m_k} \|_p \le \| f_{m_1} \|_p + \| f_{m_k} - f_{m_1} \|_p \le \frac{1}{2} + \| f_{m_1} \|_p$, то получаем, что $\exists M > 0 \forall k : \int\limits_{G} | f_{m_k}(x)|^p \, dx < M$. Отсюда по теореме Фату: $\int\limits_{G} | f(x)|^p \, dx < M$, т.е. $f \in L_p(G)$. Наконец, так как $\forall m > m_r, \forall k > r : \| f_{m_k} - f_m \|_p \le \| f_{m_k} - f_{m_r} \|_p + \| f_{m_r} - f_m \|_p < 2^{-r+1}$, то, переходя к пределу при $m_k \to +\infty$, получим: $\lim\limits_{k \to \infty} \| f_{m_k} - f_m \|_p = \| f - f_m \|_p < 2^{-r+1}$ для любого $m > m_r$. Это означает, что $f_k \to f$ в $L_p(G)$. Таким образом, $L_p(G)$ – полное нормированное (т.е. банахово) пространство.

Замечание 18.2. Для нас особенно важным из лебеговых пространств $L_p(G)$ будут пространства $L_1(G)$ всех суммируемых на G функций и гильбертово (т.е. полное евклидово) пространство $L_2(G)$. Скалярное произведение в $L_2(G)$ определяется как

$$(f, g) = \int\limits_{G} f(x)\overline{g(x)}dx .$$

Замечание 18.3. Символом $L_{1,loc}(G)$ обозначаем множество всех функций $f \in L_1(G)$, суммируемых на каждом компактном измеримом подмножестве $G_1 \subset G$. Этот класс будем называть классом локально суммируемых в G функций. Отметим без доказательства следующее свойство пространств $L_p(G)$.

<u>Теорема 18.3.</u> Множество $C_0^\infty(G)$ – множество бесконечно дифференцируемых в R^n функций с носителем, лежащим в G, всюду плотно в $L_p(G), 1 \le p < \infty$, т.е.

$$\forall f \in L_p(G) \forall \varepsilon \exists \varphi \in C_0^\infty(G): \| f - \varphi \|_p < \varepsilon .$$

<u>Упражнение 18.1.</u> Вычислить интеграл:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \text{ рационально;} \\ \cos x, & x \text{ иррационально;} \end{cases}$

б) $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } \cos x \text{ рационально;} \\ \sin^2 x, & \sin x \text{ иррационально.} \end{cases}$

<u>Упражнение 18.2.</u> Пусть $f \in L_1(G)$, а

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| < N; \\ N, & \text{если } |f(x)| \ge N. \end{cases}$$

Доказать, что $f_N(x)$ – интегрируемая на G функция и

$$\lim_{N \to \infty} \int\limits_G f_N(x)dx = \int\limits_G f(x)dx .$$

§ 19. Пространства Соболева

<u>19.1. Обобщенные производные</u>

<u>Определение 19.1.</u> Пусть $G \subseteq R^n$ – открытое множество, $f, g \in L_{1,loc}(G)$. Если

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(G): \int\limits_G g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|k|} \int\limits_G f(x)\varphi^{(k)}(x)dx , \qquad (19.1)$$

где $k=(k_1,k_2,...,k_n)$ – мультиинтекс; $k_i \ge 0$ – целые числа, то функция g называется обобщенной производной по Соболеву функции f вида

$$f^{(k)}(x)=D^k f(x)=\frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}},\quad |k|=k_1+...k_n.$$

Отметим следующие свойства обобщенных производных.

1. Если $g(x)=f^{(k)}(x),\ h(x)=f^{(k)}(x)$ в G, то $g(x)=h(x)$ п.в. в G.

2. Если $\exists f^{(k)}(x),\ \exists h^{(k)}(x)$ в G, то

$$\exists Cf^{(k)}(x)+Dh^{(k)}(x)=\left(Cf(x)+Dh(x)\right)^{(k)}.$$

3. Если $f\in C^m(G)$, то

$$\forall k,|k|\le m \forall\varphi\in C_0^\infty(G): \int\limits_G f^{(k)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^{|k|}\int\limits_G f(x)\varphi^{(k)}(x)dx.$$

Таким образом, если f имеет в G классическую производную $f^{(k)}(x),$ то она совпадает с обобщенной производной.

<u>Примеры.</u> ***<u>19.1.</u>*** $f(x)=|x|, G=(-\infty,+\infty).$ Тогда для любой $\varphi\in C_0^\infty(R^1)$ будет выполнено

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|\varphi'(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}x\varphi'(x)dx-\int\limits_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx=$$

$$=x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}-\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx-x\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty}+\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}\,x\ \varphi(x)dx.$$

Следовательно, существует $|x|'=\mathrm{sign}\,x.$

<u>19.2.</u> $f(x)=\mathrm{sign}\,x, G=R^1=(-\infty,+\infty)$. Тогда для любой $\varphi\in C_0^\infty(R^1)$ будет

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}\,x\ \varphi'(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi'(x)dx-\int\limits_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx=$$

$$=\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}-x\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty}=2\varphi(0).$$

Таким образом, если существует $g \in L_{1,loc}(G)$, для которой равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx = 2\varphi(0)$ выполнено для всех $\varphi \in C_0^\infty(R^1)$, то это и есть производная от $\operatorname{sign} x$. Покажем, что такой функции нет.

В самом деле, для любого n = 0, 1, 2, … функция $\varphi(x)\cos nx \in C_0^\infty(R^1)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\cos nx\, dx = 2\varphi(0)$. По лемме Римана $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\cos nx\, dx = 2\varphi(0).$ Взяв $\varphi(x)$, такую, что $\varphi(0) \neq 0$, приходим к противоречию.

Вывод: не всякая $f \in L_{1,loc}(G)$ имеет производную по Соболеву в смысле определения 19.1.

Получим еще одно важное свойство обобщенных производных.

Теорема 19.1. Пусть функция $f \in L_p(G),\ 1 \le p < \infty,$ а $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ такова, что:

а) $\forall m : f_m \in L_p(G);$

б) $\forall m \exists f_m^{(k)} \in L_p(G), k = (k_1, k_2, ..., k_n).$

Тогда, если:

а) $f_m \to f$ в $L_p(G)$;

б) $\{f_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L_p(G)$,

то в G существует $f^{(k)}$ и $f_m^{(k)} \to f^{(k)} \in L_p(G),\ m \to \infty$ в метрике пространства $L_p(G)$.

Доказательство. В силу полноты пространства $L_p(G)$ из фундаментальности $\{f_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ в $L_p(G)$ следует, что существует $g \in L_p(G)$, такая, что $f_m^{(k)} \underset{m\to\infty}{\to} g$ в $L_p(G)$.

Далее, так как для любой $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполняется

$$\left| \int\limits_G \left(f_m^{(k)}(x) - g(x) \right) \varphi(x) \right| dx \le \| f_m^{(k)} - g \|_p \| \varphi \|_q \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

то для любой $\varphi \in C_0^\infty(G)$ будет справедливо соотношение

$$\int_G f(x)\varphi(x)dx = \lim_{m\to\infty}\int_G f_m^{(k)}(x)\varphi(x)dx = \lim_{m\to\infty}(-1)^{|k|}\int_G f_m(x)\varphi^{(k)}(x)dx =$$

$$= (-1)^{|k|}\int_G f(x)\varphi^{(k)}(x)dx.$$

Таким образом, существует $f^{(k)}(x) = g(x) \in L_p(G)$.

19.2. Пространства С.Л. Соболева $W_p^l(G)$

Определение 19.2. Пусть $G \subseteq R^n$ – открытое множество; $1 \le p < \infty$, $l \in N$. Символом $W_p^l(G)$ обозначим множество локально суммируемых на G функций f, имеющих локально суммируемые на G производные $f^{(k)}$ при всех $k : |k| \le l$, для которых конечна величина

$$\| f \|_{W_p^l(G)} = \left(\| f \|_{L_p(G)}^p + \sum_{0<|k|\le l} \| f^{(k)} \|_{L_p(G)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (19.2)$$

Теорема 19.2. Множество $W_p^l(G)$ с нормой, определяемой соотношением (19.2), является полным, нормированным пространством.

Доказательство.

1. Проверим, что соотношение (19.2) определяет норму. Первая аксиома нормы принимается по определению, вторая аксиома очевидна. Проверим выполнение неравенства треугольника. Запишем неравенство Минковского

$$\left(\int_G | F(x) + G(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_G | F(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_G | G(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

для функций

$$F(x) = \begin{cases} a_i, & x \in K_i; \\ 0, & x \notin \bigcup_{i=1}^N K_i; \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} b_i, & x \in K_i; \\ 0, & x \notin \bigcup_{i=1}^N K_i, \end{cases}$$

где $G = R^n$, а K_i – не пересекающиеся, единичные кубы в R^n, $i = 1, 2, ..., N$. Получим неравенство Минковского для сумм

$$\left(\sum_{i=1}^{N} | a_i + b_i |^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{N} | a_i |^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{N} | b_i |^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда

$$\left(f+g\right)_{W_p^l(G)} = \left(\sum_{0<|k|\le l} \| f^{(k)} + g^{(k)} \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{0<|k|\le l} \left(\| f^{(k)} \|_p + \| g^{(k)} \|_p\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

(неравенство Минковского для сумм)

$$\le \left(\sum_{0<|k|\le l} \| f^{(k)} \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{0<|k|\le l} \| g^{(k)} \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \| f \|_{W_p^l(G)} + \| g \|_{W_p^l(G)}.$$

2. Проверим полноту пространства $W_p^l(G)$. Если $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $W_p^l(G)$, то для любого k, $|k| \le l$ последовательность $\{f_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ будет фундаментальна в $L_p(G)$. В силу полноты $L_p(G)$ существует $f \in L_p(G)$, такая, что $f_m \to f$ в $L_p(G)$. Теперь, применяя теорему 19.1, получаем, что для любого k, $|k| \le l$, существует $\lim\limits_{m\to\infty} f_m^{(k)} \to f^{(k)} \in L_p(G)$ в пространстве $L_p(G)$. Таким образом, $f \in W_p^l(G)$. Следовательно, $W_p^l(G)$ − полное пространство.

Замечание 19.1. Полное, нормированное (банахово) пространство $W_p^l(G)$ называется пространством С.Л. Соболева.

Замечание 19.2. Если $p = 2$, то $W_2^l(G) = H_2^l \equiv H^l(G)$ − полное, евклидово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx + \sum_{0<|k|\le l} \int_G f^{(k)}(x)\overline{g^{(k)}(x)}dx.$$

Этот случай (гильбертова пространства) будет наиболее важным для нас в дальнейшем.

<u>19.3. Пополнение $C_0^\infty(G)$ по норме $W_p^l(G)$.</u>

<u>Пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$</u>

<u>**Определение 19.3.**</u> Обозначим символом $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ множество всех функций $f \in W_p^l(G)$, каждая из которых является пределом по метрике $W_p^l(G)$ некоторой последовательности $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(G)$,

$$\overset{\circ}{W}{}_p^l(G) = \left\{ f \in W_p^l(G) \mid \exists \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(G) : \| f - \varphi_m \|_{W_p^l(G)} \to 0, m \to \infty \right\}.$$

Это множество называется пополнением $C_0^\infty(G)$ по норме $W_p^l(G)$ (или замыканием $C_0^\infty(G)$ в метрике $W_p^l(G)$).

<u>**Теорема 19.3.**</u> $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – линейное пространство в $W_p^l(G)$. $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – полное, нормированное пространство с нормой (19.2).

<u>*Доказательство.*</u>

1. Для любых функций $f, g \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ существуют последовательности $\{f_m\}_{m=1}^\infty, \{g_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(G)$, такие, что

$$\| f - f_m \|_{W_p^l(G)} \to 0, \| g - g_m \|_{W_p^l(G)} \to 0, m \to \infty .$$

Но тогда $\{\alpha f_m + \beta g_m\}_{m=1}^\infty \in C_0^\infty(G)$ и

$$\| (\alpha f + \beta g) - (\alpha f_m + \beta g_m) \|_{W_p^l(G)} \le |\alpha| \| f - f_m \|_{W_p^l(G)} + |\beta| \| g - g_m \|_{W_p^l(G)} \to 0,$$

т.е. $\alpha f + \beta g \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Следовательно, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – линейное пространство в $W_p^l(G)$.

2. Пусть теперь $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ – фундаментальная в $W_p^l(G)$ последовательность функций $f_m \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Тогда существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = f \in W_p^l(G)$. Покажем, что $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$.

Имеем

$$\forall m \exists \{\varphi_{ml}\}_{l=1}^{\infty} : \| \varphi_{ml} - f_m \|_{W_p^l(G)} \underset{l\to\infty}{\to} 0 .$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\forall m \exists k_m : \| \varphi_{mk_m} - f_m \|_{W_p^l} < \dfrac{\varepsilon}{2^m}$. Рассмотрим последовательность $\left\{\varphi_{mk_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$. Для нее получаем

$$\| f - \varphi_{mk_m} \|_{W_p^l} < \| f - f_m \|_{W_p^l} + \| f_m - \varphi_{mk_m} \|_{W_p^l} .$$

Выбираем для фиксированного ранее ε номер $N(\varepsilon)$ так, чтобы при $m > N(\varepsilon)$ выполнялось $\| f - f_m \|_{W_p^l} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда при $m > N(\varepsilon)$ будет

$$\| f - \varphi_{mk_m} \|_{W_p^l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^m} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\varphi_{mk_m} \to f$, $m \to \infty$ по метрике $W_p^l(G)$, т.е. $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$.

<u>***Замечание.***</u> Пространство $C_0^{\infty}(G)$ всюду плотно в $L_p(G)$. Это означает, что замыкание $C_0^{\infty}(G)$ в метрике $L_p(G)$ совпадает с $L_p(G)$. Можно показать, что если $G = R^n$, то $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G) = W_p^l(G)$. Если же $G \neq R^n$, например G – ограниченная область в R^n, то это не так: в этом случае $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – собственное подпространство $W_p^l(G)$. Покажем, например, что $f(x) \equiv 1$ в G, очевидно принадлежащая $W_p^l(G)$ для любой ограниченной области G, тем не менее не при-

надлежит $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Пусть существует $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(G), \varphi_m \to 1$ в $W_p^l(G)$. Тогда, в частности, $\dfrac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_1} \to 0$ в $L_p(G)$. Отсюда

$$\int_G \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \varphi_m(x)dx = -\int_G x_1 \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_1} dx \underset{m\to\infty}{\to} 0 .$$

С другой стороны, $\int_G \dfrac{\partial x_1}{\partial x_1} \varphi_m(x)dx = \int_G \varphi_m(x)dx \underset{m\to\infty}{\to} \int_G 1dx = \mu(G)$. Таким образом, приходим к противоречию, т.е. $1 \equiv f(x) \notin \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Следовательно, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – собственное подпространство в $W_p^l(G)$.

§ 20. Гильбертовы пространства $W_2^l(G) \equiv H^l(G),\ l \in Z$

20.1. Теорема Рисса о представлении линейного функционала

Теорема 20.1. Пусть f – линейный, ограниченный функционал в гильбертовом пространстве H (с вещественными или комплексными значениями). Тогда существует единственный элемент $y_f \in H$, такой, что для любого $x \in H$ выполняется $f(x) = (x, y_f)$. При этом $\| y_f \| = \| f \|$.

Доказательство. Пусть $X = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$. Если $X = H$, то $f(x) \equiv 0$ и, следовательно, $y_f = 0$. Если же $X \subset H$, то $\exists y_0 \in H : y_0 \perp X$, т.е. $\forall x \in X : (x, y_0) = 0$.

Определим $y_f = \overline{f(y_0)} \dfrac{y_0}{\| y_0 \|^2}$. Тогда:

1) для любого $x \in X : (x, y_f) = \overline{\left(\dfrac{\overline{f(y_0)}}{\| y_0 \|^2} \right)} (x, y_0) = 0 = f(x);$

2) для любого $x = \alpha y_0$ получим

$$(x, y_f) = \frac{f(y_0)}{\| y_0 \|^2} \alpha(y_0, y_0) = f(\alpha y_0) = f(x);$$

3) для любого $x \in H$ имеем $x = \left(x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f \right) + \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f$, а так как

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f \right) = 0,$$

т.е.

$$x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f \in X, \quad \text{и} \quad f(y_f) = (y_f, y_f) = \| y_f \|^2,$$

то $(x, y_f) = \left(\frac{f(x)}{f(y_f)} y_f, y_f \right) = f(x).$

Таким образом, для любого $x \in H$ будет выполнено $(x, y_f) = f(x).$

Осталось проверить, что $\| f \| = \| y_f \|$.

Имеем $\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\|x\| \le 1} | f(x) | = \sup\limits_{\|x\| \le 1} | (x, y_f) | \le \| y_f \| \sup\limits_{\|x\| \le 1} \| x \| = \| y_f \|,$ а кроме того, $\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\|x\| \le 1} | f(x) | \ge f\left(\frac{y_f}{\| y_f \|} \right) = \left(\frac{y_f}{\| y_f \|}, y_f \right) = \| y_f \|.$

<u>Определение 20.1.</u> Множество линейных функционалов, определенных на гильбертовом пространстве H, называется сопряженным пространством к H и обозначается H'.

<u>Замечание 20.1.</u> Легко проверить, что H' является линейным пространством относительно обычных операций сложения функционалов и умножения их на числа. Пространство H' является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения, определяемого по формуле $(f, g) \overset{\text{def}}{=} \overline{(y_f, y_g)}$. При доказательстве предыдущей теоремы было построено взаимно однозначное соответствие $f \leftrightarrow y_f$ между $H = H'$. При этом соответствии сохраняются линейные операции.

Замечание 20.2. Если $H = L_2(G)$, то для любого линейного, ограниченного функционала F, действующего в пространстве $L_2(G)$, существует единственная функция $f \in L_2(G)$, такая, что для любой $g \in L_2(G)$ выполнено $F(g) = \int\limits_G g(x) f(x) dx$, при этом

$$\| F \| = \left(\int\limits_G | f(x) |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

20.2. Оснащенное гильбертово пространство. Основные и обобщенные функции

Определение 20.2. Банахово пространство $(B_1, \| \cdot \|_1)$ называется вложенным в банахово пространство $(B_2, \| \cdot \|_2)$, если:

1) $B_1 \subset B_2$ (B_1 есть подмножество в B_2);

2) для любого $x \in B_1$ выполнено $\| x \|_2 \le C \| x \|_1$, где C не зависит от x.

Для записи этого вложения используется обозначение $B_1 \hookrightarrow B_2$.

Определение 20.3. Вложение $B_1 \hookrightarrow B_2$ называется плотным, если замыкание множества B_1 в метрике B_2 совпадает с B_2.

Примеры.

20.1. Справедливы соотношения $C^1(\overline{G}) \hookrightarrow C(\overline{G}) \hookrightarrow L_1(G)$, где последнее вложение справедливо, если G – ограниченная область.

20.2. $W_p^l(G) \hookrightarrow L_p(G)$.

20.3. Так как $C_0^\infty(G)$ плотно в $L_p(G)$, то любое пространство B, содержащее $C_0^\infty(G)$ и вложенное в $L_p(G)$, вложено в него плотно.

20.4. Вложение $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G) \hookrightarrow W_p^l(G)$ – не плотное, а вложение $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G) \hookrightarrow L_p(G)$ и $W_p^l(G) \hookrightarrow L_p(G)$ – плотное.

Упражнение. Доказать, что для любых $1 \le p < q < \infty$ выполнено $L_q(G) \subsetneq L_p(G)$.

Определение 20.4. Пусть банахово пространство B_+ плотно вложено в гильбертово пространство H_0. Для любой $f \in H_0$ обозначим

$$\| f \|_- = \sup_{x \in B_+, \|x\|_+ \le 1} |(x, f)|. \tag{20.1}$$

Тогда $\left(B_+, \|\cdot\|_+\right)$ называется позитивным пространством (или пространством основных функций), пополнение H_0 по норме $\|\cdot\|_-$ обозначается $\left(B_-, \|\cdot\|_-\right)$ и называется негативным пространством (или пространством обобщенных функций), а тройку вложенных пространств $B_+ \subsetneq H_0 \subsetneq B_-$ называют оснащенным пространством.

Замечание 20.3. То, что (20.1) определяет норму на H_0 очевидно. Из неравенства Коши–Буняковского–Шварца получаем, что для любой $f \in H_0$ следуют неравенства

$$\| f \|_- \le \sup_{x \in B_+, \|x\|_+ \le 1} \| x \|_0 \| f \|_0 \le \sup_{x \in B_+, \|x\|_+ \le 1} C \| x \|_+ \| f \|_0 \le C \| f \|_0,$$

откуда получаем, что $H_0 \subsetneq B_-$, причем это вложение – плотное (по определению пополнения).

Пример 20.5. Пусть $H_0 = L_2(G), B_+ = \overset{\circ}{H}{}^l(G) \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^l(G), l = 1, 2, ...$.

Тогда пространство B_- обозначается символом $H^{-l}(G)$ и называется пространством Соболева с отрицательным показателем дифференцирования. Тройка пространств $\overset{\circ}{H}{}^l(G) \subsetneq L_2(G) \subsetneq H^{-l}(G)$ образует оснащенное гильбертово пространство.

Норма $H^{-l}(G), l = 1, 2, ...,$ задается соотношением

$$\| f \|_{H^{-l}(G)} = \sup_{\|x\|_{H^l(G)} \le 1} |(x, f)_{L_2(G)}|.$$

Таким образом, определили пространства $H^l(G)$ при $l \in Z$.

Пример 20.6. Пусть $G=(a,b), H_+=\overset{\circ}{H}{}^1(a,b)\equiv \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b).$ Покажем, что справедливо вложение $\overset{\circ}{H}{}^1(a,b) \subsetneq C[a,b].$ Действительно, для любой $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ будет выполнено:

1) $\exists\xi\in(a,b): \int\limits_a^b \varphi(x)dx=\varphi(\xi)(b-a) \Rightarrow \varphi(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b \varphi(x)dx;$

2) $\varphi(x)=\varphi(\xi)+\int\limits_\xi^x \varphi'(t)dt=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b \varphi(x)dx+\int\limits_\xi^x \varphi'(t)dt.$

Отсюда, используя неравенство Коши−Буняковского, получим

$$|\varphi(x)|\le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt+\int\limits_\xi^x |\varphi'(t)|\,dt \le \frac{1}{\sqrt{b-a}}\|\varphi\|_{L^2}+\sqrt{b-a}\,\|\varphi'\|_{L^2}\le$$

$$\le C\left(\|\varphi\|_{L^2}^2+\|\varphi'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}=C\|\varphi\|_{W_2^1}.$$

Таким образом, для любой $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ выполнено

$$\|\varphi\|_{C[a,b]}=\sup_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|\le C\|\varphi\|_{W_2^1(a,b)} \qquad (20.2)$$

Далее, если $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty\subset C_0^\infty(a,b)$ и фундаментальна в $W_2^1(a,b)$, то существует $f\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$, такая, что $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f$ в $W_2^1(a,b)$. Но тогда и подавно $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ фундаментальна в $C[a,b]$, следовательно, $f\in C[a,b]$. Получим, что $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)\subsetneq C[a,b]$. Пусть $\xi\in(a,b)$. Определим на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$ функционал $\delta_\xi f(x)=f(\xi)$. Это очевидно линейный функционал. Из соотношения

$$\|\delta_\xi\|_-=\sup_{\|f\|_{W_2^1}\le 1}|f(\xi)|\le \sup_{\|f\|_{C[a,b]}\le 1}|f(\xi)|\le C,$$

где C – константа в неравенстве (20.2), следует ограниченность этого функционала на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$.

Таким образом, $\delta_\xi\in W_2^{-1}(a,b)=H^{-1}(a,b).$

<u>Определение 20.5.</u> Функционал $\delta_\xi \in W_2^{-1}(a,b)$, определенный равенством $\delta_\xi f(x) = f(\xi), \xi \in (a,b)$ (определенный на функциях $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$), называется дельта-функцией, сосредоточенной в точке $\xi \in (a,b)$. Часто δ_ξ обозначается $\delta(\xi - x)$ и применяется запись:

$$\delta_\xi f(x) = \int_a^b \delta(\xi - x) f(x) dx = f(\xi).$$

<u>Замечание 20.4.</u> В общем случае, если $G \subset R^n$ – ограниченная область, то вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G) \subsetneq C(\overline{G})$ справедливо при $l > \frac{n}{2}$.

<u>Замечание 20.5.</u> Возможно построение оснащения с помощью более общих, чем банаховы простанства (что будет сделано ниже).

Введем следующее определение.

<u>Определение 20.5.</u> Линейный функционал F в $L_2(G)$, определенный по крайней мере на множестве $C_0^\infty(G)$, называется обобщенной производной функции $f \in L_2(G)$ вида $f^{(k)}$, где $k = (k_1,\ k_2, ...,\ k_n)$, если для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполнено $F(\varphi) = (-1)^{|k|} \int_G f(x) \varphi^{(k)}(x) dx.$

<u>Теорема 20.2.</u> $\forall f \in L_2(G) \forall k = (k_1, k_2, ..., k_n) \exists f^{(k)} \in W_2^{-|k|}(G),$ где $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

<u>Доказательство</u>. На множестве $C_0^\infty(G)$ определим функционал $F(\varphi)$ равенством $F(\varphi) = (-1)^{|k|} \int_G f(x) \varphi^{(k)}(x) dx.$ Тогда

$$|F(\varphi)| \le \|\varphi^{(k)}\|_{L_2(G)} \|f\|_{L_2(G)} \le \|\varphi^{(k)}\|_{W_2^{|k|}(G)} \|f\|_{L_2}.$$

Далее, если $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(G)$ – фундаментальная в $W_2^{|k|}(G)$ последовательность, то:

1) существует $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{|k|}(G)$, такая, что $u = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x)$ в $W_2^{|k|}(G)$;

2) $\quad |F(\varphi_m)-F(\varphi_l)|=|F(\varphi_m-\varphi_l)|\le\|f\|_{L_2}\|\varphi_m-\varphi_l\|_{W_2^{|k|}(G)}$, т.е. $\{F(\varphi_m)\}_{m=1}^{\infty}$ – фундаментальная числовая последовательность. Но тогда существует $\lim\limits_{m\to\infty}F(\varphi_m)$. Положим $F(u)=\lim\limits_{m\to\infty}F(\varphi_m)$.

Таким образом, функционал F определен на всем $\overset{\circ}{W}{}_2^{|k|}(G)$, и для любой $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^{|k|}(G)$ будет выполнено $|F(u)|\le\|f\|_{L_2}\|u\|_{W_2^{|k|}(G)}$, т.е. это ограниченный на $\overset{\circ}{W}{}_2^{|k|}(G)$ функционал. Но тогда $F\in W_2^{-|k|}(G)$ и по построению F совпадает с $f^{(k)}(x)$.

20.3. Теорема Лакса–Мильграма

Теорема 20.3. Пусть $H_+\hookrightarrow H_0\hookrightarrow H_-$ – оснащенное гильбертово пространство, а $B(f,g)$ – билинейный функционал на гильбертовом пространстве H_+, удовлетворяющий условиям:

1) $\exists\kappa>0\,\forall f\in H_+: B(f,f)\ge\kappa\|f\|_+^2$;

2) $\exists C>0\,\forall f,g\in H_+: B(f,g)\le C\|f\|_+\|g\|_+$.

Тогда существует линейный оператор $A:H_+\to H_-$, осуществляющий изоморфизм этих пространств и такой, что $B(f,g)=\langle Af,g\rangle$, где символ $<Af,g>$ означает действие функционала $Af\in H_-$ на элемент $g\in H_+$.

Доказательство.

1. Фиксируем $f\in H_+$. Тогда, полагая $F(g)=B(f,g)$, получаем, что F – линейный, ограниченный функционал (использовалось второе условие теоремы). Положим теперь $Af=F$.

2. Очевидно, что A – линейный оператор с $D(A)=H_+$ и $E(A)=H_-$. Если $Af=\theta\in H_-$ – нуль в H_-, то это означает, что $\forall g\in H_+:\langle Af,g\rangle=B(f,g)=0$.

Взяв $f=g$, получим $0=B(f,f)\geq \kappa\| f\|_{+}^{2}$, т.е. $\| f\|_{+}^{2}=0$ в H_{+}. Таким образом, $\operatorname{Ker} A=\{\theta\}$.

3. Пусть $F\in H_{-}$ – произвольный элемент. Тогда $<F,g>$ – линейный, ограниченный функционал на H_{+}. В силу условий теоремы форма $B(f,g)$ является на H_{+} скалярным произведением, порождающим эквивалентную норме $\|\cdot\|_{+}$ норму $\|\cdot\|_{+,B}$. Но тогда $\langle F,g\rangle$ – линейный, ограниченный по этой норме функционал. По теореме Рисса $\forall f\in H_{+}:\langle F,g\rangle=B(f,g)=\langle Af,g\rangle$ для всех $g\in H_{+}$. Таким образом, $E(A)=H_{-}$. Тем самым доказано, что $A:H_{+}\to H_{-}$– изоморфизм этих пространств.

<u>Пример 20.7.</u> Пусть $A=-\Delta+I$, т.е. для любой $\varphi\in C_{0}^{\infty}(G)$: $A\varphi=-\Delta\varphi+\varphi$, где Δ – оператор Лапласа. Тогда рассмотрим форму

$$B(\varphi,\psi)=(A\varphi,\psi)=\int_{G}(-\Delta\varphi+\varphi)\overline{\psi}(x)dx=\int_{G}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}+\varphi\overline{\psi}(x)\right)dx\,. \quad (20.3)$$

Очевидно, получаем для любых $\varphi,\psi\in C_{0}^{\infty}(G)$:

1) $B(\varphi,\varphi)=\|\varphi\|_{W_2^1(G)}^{2}$;

2) $|B(\varphi,\psi)|\leq\|\varphi\|_{W_2^1}\|\psi\|_{W_2^1}$.

По непрерывности, приведенные выше оценки остаются справедливыми для любых $\varphi,\psi\in\overset{\circ}{W}{}_{2}^{1}(G)$. При этом оператор A понимается в (20.3) уже в обобщенном смысле. Взяв $H_{+}=\overset{\circ}{W}{}_{2}^{1}(G), H_{0}=L_{2}(G), H_{-}=W_{2}^{-1}(G)$ и применив теорему Лакса–Мильграма, получаем, что оператор $A=-\Delta+I$ есть изоморфизм $W_{2}^{1}(G)$ и $W_{2}^{-1}(G)$.

20.4. Неравенство Фридрихса.

Введем обозначение $|u|_{W_2^l(G)} = \left(\sum_{|k|=l} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 20.4. Для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ выполняется

$$\| u \|_{L_2} \le C \| u \|_{W_2^l(G)},$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от u.

Доказательство. Очевидно достаточно доказать неравенство для функций класса $C_0^\infty(G)$.

Рассмотрим куб $Q = \{x \in R^n : \ a \le x_i \le b, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$, содержащий область G. Тогда для любой $\varphi \in C_0^\infty(G)$ будут выполнены соотношения:

$$\varphi(x_1, \bar{x}) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi(\xi, \bar{x})}{\partial \xi} d\xi;$$

$$\left| \varphi(x_1, \bar{x}) \right|^2 \le \left(\int_a^{x_1} \left| \frac{\partial \varphi(\xi, \bar{x})}{\partial \xi} \right| d\xi \right)^2 \le (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi(\xi, \bar{x})}{\partial \xi} \right|^2 d\xi;$$

$$\| \varphi \|_{L_2(G)}^2 \le (b-a) \int_Q dx \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi(\xi, \bar{x})}{\partial \xi} \right|^2 d\xi = (b-a)^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|_{L_2(G)}^2 \le (b-a)^2 \| \varphi \|_{W_2^1(G)}^2 .$$

Далее, рассуждая по индукции, получаем, что для любой $\varphi \in C_0^\infty(G)$ будет выполнено $|\varphi|_{L_2(G)} \le C |\varphi|_{W_2^l(G)}$, $l = 1, 2, \ldots$.

В силу плотности $C_0^\infty(G)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ получаем справедливость этой оценки для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$.

IV. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 21. Пространства D и D'

21.1. Определения и основные свойства

Всюду далее $G = R^n$ или $G \subset R^n$ − некоторая область.

Определение 21.1. На классе $C_0^\infty(G)$ введем понятие сходимости следующим образом: последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(a,b)$ называется сходящейся к функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ ($\varphi_m \xrightarrow{D} \varphi$), если выполняются условия.

1. Существует компакт $K \subset G$, такой, что для любого m будет $\operatorname{supp} \varphi_m \subseteq K$.

2. Для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ имеет место равномерная сходимость $D^\alpha \varphi_m \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ на G; множество $C_0^\infty(G)$ с такой сходимостью обозначается символом D и называется пространством основных функций.

Перечислим основные свойства пространства D.

1. Пространство D является полным относительно введенной сходимости, т.е. если $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(a,b)$, удовлетворяет первому условию определения 21.1 и фундаментальна в смысле второго условия, то существует $\varphi \in D$, такая, что $\varphi_m \to \varphi$ в D.

2. Оператор дифференцирования $D^\beta : D \to D$ непрерывен, т.е. если $\varphi_m \to \varphi$ в D, то $D^\beta \varphi_m \to D^\beta \varphi$ в D.

3. Для любого $l = 0, 1, 2, ...$ в случае сходимости $\varphi_m \to \varphi$ в D будет иметь место и сходимость $\varphi_m \to \varphi$ в $W_2^l(G)$. В этом смысле справедливо вложение $D \hookrightarrow W_2^l(G) \hookrightarrow L_2(G) \hookrightarrow W_2^{-l}(G)$.

Определение 21.2. Символом D' обозначим множество всех функционалов на D, обладающих следующими свойствами:

1) линейностью: $\forall \varphi, \psi \forall \alpha, \beta : f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi)$;

2) непрерывностюью в D: если последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится $\varphi_m \to \varphi$ в D, то будет сходится и последовательность $f(\varphi_m) \to f(\varphi)$;

<u>Определение 21.3.</u> Последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D'$ называется слабосходящейся к $f \in D'$, если для любой $\varphi \in D$ выполняется $f_m(\varphi) \to f(\varphi)$.

Пространство D' называется пространством обобщенных функций.

Свойства пространства обобщенных функций.

1. D' – полное относительно слабой сходимости пространство.

Доказательство см. [3], 5.4.

2. Если $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset W_2^{-l}(G)$ и $f_m \to f$ в $W_2^{-l}(G)$, т.е.

$$\| f_m - f \|_{-l} = \sup_{\left\{\substack{\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(G) \\ \|\varphi\|_l \le 1}\right.} |(f_m - f)(\varphi)| \to 0,$$

то очевидно и подавно для любой функции $\varphi \in D$ будет $(f_m - f)(\varphi) \to 0$, т.е. $f_m \to f$ в D'. Таким образом, можем записать, что $W_2^{-l}(G) \subsetneq D'$, а тогда для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$ будут справедливы вложения $D \subsetneq \overset{\circ}{W}{}_2^l(G) \subsetneq L_2(G) \subsetneq W_2^{-l}(G) \subsetneq D'$.

3. Если $a \in C^{\infty}(R^n)$, а $f \in D'$, то по определению $(af)(\varphi) = af(\varphi) = f(a\varphi)$, т.е. определено произведение функции $a \in C^{\infty}(R^n)$ и обобщенной функции $f \in D'$. Иногда можно ослабить условие, например, требовать, чтобы $(a\delta_{\xi})\varphi = a\varphi(\xi)$ было бы определено для любой $a \in C(R^n)$.

<u>Определение 21.4.</u> Ранее была определена дельта-функция: для любой функции $\varphi \in D$ и $\xi \in R^n$ положим $\langle \delta_{\xi}, \varphi \rangle \equiv \delta_{\xi}(\varphi) = \varphi(\xi)$ – дельта-функция, сосредоточенная в точке $\xi \in R^n$.

<u>Определение 21.5.</u> $\langle \delta_S, \varphi \rangle \equiv \delta_S(\varphi) = \int\limits_S \varphi(x)\,dS$ – дельта-функция, сосредоточенная на множестве S.

Определение 21.6. $\langle \mu\delta_S, \varphi\rangle = \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)dS, \mu \in C(\overline{S})$ − простой потенциал с плотностью μ.

Пример 21.1. Найти функционал $P\frac{1}{x}$.

Определим на D функционал $P\frac{1}{x}$ как главное значение ($V.P.$) по Коши интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$. Именно, для любой функции $\varphi \in D$ положим

$$\left\langle P\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle \stackrel{def}{=} V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx\right).$$

Покажем, что $P\frac{1}{x} \in D'$. Если в $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D, \varphi_m \to 0$ в D, то существует $R > 0$, такое, что $\operatorname{supp}\varphi_m \subseteq [-R, R]$ для всех m, а тогда

$$\left|\left\langle P\frac{1}{x}, \varphi_m\right\rangle\right| = \left|V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)}{x}dx\right|.$$

По формуле Лагранжа $\left|V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)}{x}dx\right| = \left|V.P.\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_m(0) + \varphi_m{}'(\xi)}{x}dx\right| =$

$$= \left|V.P.\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_m(0)}{x}dx + \int\limits_{-R}^{R} \varphi_m{}'(\xi)dx\right| \le 2R \sup_{x\in[-R,R]} |\varphi_m{}'(x) - 0| \to 0, m \to \infty,$$

так как $\xi \in (0, x)$. Следовательно, $P\frac{1}{x}$ − непрерывный в D функционал, т.е. $P\frac{1}{x} \in D'$. Кроме того, имеем

$$\left\langle P\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle = V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = V.P.\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx,$$

так как существует R, такое, что носитель функции будет $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R, R]$, а $V.P.\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)}{x}dx = 0.$

<u>Пример 21.2</u>. Найти обобщенные функции $\frac{1}{x \pm i0}$ и формулы Сходского. По определению $\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right\rangle \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i0} dx \right).$

Имеем, если $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R, R]$, то

$$\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_{-R}^{+R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \left[\varphi(0) + (\varphi(x) - \varphi(0)) \right] dx \right) =$$

$$= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_{-R}^{+R} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right) - i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_{-R}^{+R} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_{-R}^{+R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right) = 2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0+0} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} +$$

$$+ \int\limits_{-R}^{+R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = -i\pi\varphi(0) + \left\langle P\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle.$$

Получаем формулы Сходского:

$$\frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}.$$

<u>Пример 21.3.</u> Доказать, что $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \to \delta(x)$ при $\varepsilon \to 0+0$ в D.

<u>Доказательство</u>. Для любой функции $\varphi \in D$ выполнено

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \varphi(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} dx +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \varphi(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \left(\varphi(x) - \varphi(0) \right) dx = \varphi(0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left(\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t) - \varphi(0) \right) dt.$$

При $\varepsilon \in (0,\ 1]$ рассмотрим функцию

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left(\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t) - \varphi(0)\right) dt.$$

В силу непрерывности по ε и t подынтегральной функции и равномерной сходимости интеграла на множестве $(0,\ \varepsilon]$ функция $\Phi(\varepsilon)$ будет непрерывна на $[0,\ 1]$, откуда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \Phi(\varepsilon) = \Phi(0) = 0.$

Таким образом, для любой $\varphi \in D$ будет выполнено равенство $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \varphi(x) dx = \varphi(0)$, и, следовательно,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \to \delta(x) \text{ в } D.$$

<u>*21.2. Дифференцирование обобщенных функций*</u>

<u>***Определение 21.7.***</u> Для любой $f \in D'$ и любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ положим $\left\langle g, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, \varphi^{(\alpha)} \right\rangle$ для любой $\varphi \in D.$ Тогда функционал $g \in D'$ обозначается $f^{(\alpha)} \equiv D^\alpha f$ и называется обобщенной производной функции f вида $D^\alpha f$. Таким образом, для любой $\varphi \in D$ будет выполнено

$$\left\langle D^\alpha, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, D^\alpha \varphi \right\rangle.$$

Отметим свойства обобщенной производной.

1. Линейность. Для любых $f_1, f_2,$ $C_1, C_2 \in \boldsymbol{C},$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ существует $D^\alpha(C_1 f_1 + C_2 f_2)$ и $D^\alpha(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 D^\alpha(f_{12}) + C_2 D^\alpha(f_2).$

2. $D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta}(f).$

3. Непрерывность. Для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ оператор $D^\alpha : D' \to D'$ является непрерывным оператором.

<u>*Доказательство*</u>. Для любой последовательности $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D'$, сходящейся к f в D', имеем

$$\left\langle D^{\alpha} f_m, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f_m, D^{\alpha}\varphi \right\rangle \to (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, D^{\alpha}\varphi \right\rangle = \left\langle D^{\alpha} f, \varphi \right\rangle$$

для всех $\varphi \in D$. Таким образом, по определению, $D^{\alpha} f_m \to D^{\alpha} f$, $m \to \infty$ в D'.

Замечание 21.1. Оператор $D^{\alpha} : W_2^l(G) \to W_2^{l-|\alpha|}(G)$ – непрерывный оператор, $l \in Z$.

21.3. Обобщенные функции как производные

Теорема 21.1. Пусть $f \in D'$, $K \subset G$, – компакт в G. Тогда существуют $g \in C(\overline{G})$ и мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, такие, что $\left\langle f, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g(x) D^{\alpha}\varphi(x)dx = \left\langle g^{(\alpha)}, \varphi \right\rangle$ для любой $\varphi \in D$ с носителем $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$.

Эта теорема означает, что любая обобщенная функция локально совпадает с производной некоторого порядка от непрерывной функции.

Пример 21.4. Пусть функция f такова, что

$$f \in C^1(x \le x_0) \cup C^1(x \ge x_0);$$

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) - \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0+0) - f(x_0-0) = [f](x_0) \ne 0.$$

Тогда для любой $\varphi \in C_0^{\infty}(R^1)$ будет выполняться

$$\left\langle f', \varphi \right\rangle \overset{def}{=} -\left\langle f, \varphi' \right\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{+\infty} + \int\limits_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx =$$

$$= [f(x_0)]\varphi(x_0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f'\}(x)\varphi(x)dx,$$

где $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f'\}(x)\varphi(x)dx \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$.

Получили: $f' = [f](x_0)\delta(x - x_0) + \{f'\}$.

<u>Пример 21.5.</u> Пусть $n = 2$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, тогда для любой функции φ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset U_R(0)$ и $\varphi \in C_0^\infty(R^2)$ будет выполнено

$$\langle \Delta \ln|x|, \varphi \rangle = \iint\limits_{U_R(0)} \ln|x|\,\Delta\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \iint\limits_{\varepsilon\le|x|\le R} \ln|x|\,\Delta\varphi(x)dx =$$

$$\text{(по формуле Грина } \iint\limits_G (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \text{)}$$

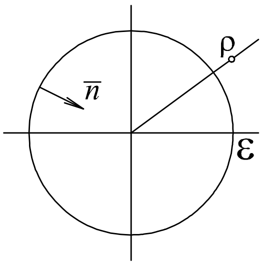
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \left[\iint\limits_{\varepsilon\le|x|\le R} \underset{0}{\cancel{\Delta \ln|x|}}\,\varphi(x)dx + \left(\int\limits_{S_\varepsilon} + \int\limits_{S_R} \right) \left(\ln|x|\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \ln|x|}{\partial n} \right) dS \right],$$

где интеграл по S_R равен нулю, так как носитель $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K_R(0)$. Тогда получаем:

$$\langle \Delta \ln|x|, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \iint\limits_{S_\varepsilon} \left(\ln|x|\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi(x)\frac{\partial \ln|x|}{\partial n} \right) dS = \left(\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial\rho} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_0^{2\pi} \left(\ln\varepsilon \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \right) + \varphi(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\frac{1|}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = -\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon\ln\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} d\theta +$$

$$+\varphi(0,0)2\pi = 2\pi\varphi(0) \text{ (см. рисунок).}$$



$$x = \varepsilon\cos\theta$$
$$y = \varepsilon\sin\theta$$
$$dS = \varepsilon d\theta$$

Таким образом, $\Delta \ln|x| = 2\pi\delta(x); \Delta\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} \right) = -\delta(x)$.

<u>Упражнение 21.1.</u> Проверить, что $\Delta\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} \right) = -\delta(x)$.

<u>Упражнение 21.2.</u> Решить уравнение $xu'(x) = 1$. (Ответ: $u(x) = C_1 + C_2\theta(x) + \ln|x|$.)

21.4. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье быстроубывающих функций

Определение 21.8. Символом $S(R^n)$ обозначим совокупность функций $\varphi \in C^\infty(R^n)$, которые для всех мультииндексов α, β удовлетворяют условиям: $\sup\limits_{x\in R^n}\left|x^\beta D^\alpha \varphi(x)\right| < +\infty$, здесь $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$.

Множество $S(R^n)$ называется множеством быстроубывающих функций. Множество $S(R^n)$ – линейное. Введем на $S(R^n)$ сходимость следующим образом: будем говорить, что последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ сходится к φ в $S(R^n)$ при $m \to \infty$, если для любых α, β выполнено $\sup\limits_{x\in R^n}\left|x^\beta D^\alpha \left(\varphi_m(x) - \varphi(x)\right)\right| \underset{m\to\infty}{\to} 0.$

Множество $S(R^n)$ с введенной на нем сходимостью называется пространством быстроубывающих функций.

Справедливы следующие свойства.

1. $D \subsetneq S(R^n)$, причем это вложение строгое. Например, $e^{-|x|^2} \in S(R^n)$, но $e^{-|x|^2} \notin D$.

2. Для любого α оператор $D^\alpha : S(R^n) \to S(R^n)$ – непрерывный оператор.

3. Если функция $a(x) \in C^\infty(R^n)$ такова, что для любого α существуют m_α, C_α, такие, что выполнено неравенство $\left|D^\alpha a(x)\right| \le C_\alpha \left(1 + |x|^2\right)^{m_\alpha}$, то $a(x)\varphi \in S(R^n)$ для любой $\varphi \in S(R^n)$.

4. Множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $S(R^n)$. Доказательство здесь не приводится.

Определение 21.9. Для любой $\varphi \in S(R^n)$ положим

$$(F\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} \varphi(t) e^{-i(\xi,t)} dt.$$

Функция $\hat{\varphi}(\xi)$ называется преобразованием Фурье функции $\varphi \in S(R^n)$.

Отметим следующие свойства.

1. Оператор $F:\varphi \to \hat{\varphi}$ является линейным, непрерывным оператором в $S(R^n)$.

Доказательство. Для любого α имеем

$$D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \varphi(x) e^{-i(\xi,x)} dx.$$

Если $\varphi \in S(R^n)$ фиксирована, то интеграл справа для любого α сходится равномерно по $\xi \in R^n$. Следовательно, дифференцирование законно. Далее:

$$i^{|\beta|}\xi^\alpha \hat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} e^{-i(\xi,x)} D^\alpha \psi(x) dx.$$

Откуда следует, что

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \int\limits_{R^n} e^{-i(\xi,x)} D^\alpha (x^\alpha \varphi(x)) dx,$$

$$\sup_{\xi\in R^n} \left| \xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) \right| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} | D^\alpha (x^\alpha \varphi(x)) | \, dx < +\infty,$$

т.е. $\hat{\varphi} \in S(R^n)$. Отсюда, очевидно, следует и линейность F в $S(R^n)$. В силу линейности F достаточно доказать его непрерывность в нуле, т.е. если последовательность $\forall \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset S(R^n)$ сходится к $0, \varphi_m \to 0,$ то $\hat{\varphi}_m \to \hat{0} = 0$ в $S(R^n)$. Это следует из оценки: для любых α, β

$$\sup_{\xi\in R^n} \left| \xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}_m(\xi) \right| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} | D^\alpha (x^\alpha \varphi_m(x)) | \, dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Замечание 21.2. Если $\varphi \in D$, то $\hat{\varphi}$ – целая аналитическая функция переменной ξ. Следовательно, $\hat{\varphi} \notin D$.

2. Обратное преобразование Фурье задается формулой

$$\left(F^{-1}\hat{\varphi}\right)(x) \equiv \tilde{\hat{\varphi}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi.$$

3. Для любых $\varphi, \psi \in S(R^n)$ выполнено

$$\left\langle F\varphi, \psi \right\rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} \left(\int\limits_{R^n} \varphi(x) e^{-i(x,\xi)} dx \right) \psi(\xi) d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} \varphi(x) \left(\int\limits_{R^n} e^{-i(x,\xi)} \psi(\xi) d\xi \right) dx = \left\langle \varphi, F\psi \right\rangle.$$

4. Преобразование Фурье свертки. Напомним, что для любых $\varphi, \psi \in S(R^n)$ свертка определяется равенством

$$\left(\varphi * \psi\right)(x) = \int\limits_{R^n} \varphi(y) \psi(x-y) dy.$$

Тогда

$$\left(\widehat{\varphi * \psi}\right)(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{\varphi}(\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

Пространство $S'(R^n)$ обобщенных функций медленного роста

<u>Определение 21.10</u>. Обозначим через $S'(R^n)$ множество всех линейных, непрерывных на $S(R^n)$ функционалов со сходимостью, определенной следующим образом: последовательность $\{f_m\}$ сходится к f, если для любой $\varphi \in S(R^n)$ имеет место сходимость $(f_m, \varphi) \underset{m\to\infty}{\to} (f, \varphi)$.

Очевидно, что $S'(R^n)$ – линейное подпространство в D'. Это пространство называется пространством обобщенных функций медленного роста.

Отметим следующие свойства.

1. Для любого $l \in N$ будут справедливы включения

$$D \subsetneq S(R^n) \subsetneq \overset{\circ}{W}{}_2^l(R^n) \subsetneq L_2(R^n) \subsetneq W_2^{-l}(R^n) \subsetneq S'(R^n) \subsetneq D'.$$

2. **_Лемма 21.1 (Шварца)._** Для того, чтобы $f \in S'(R^n)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $C > 0$ и целое $p \geq 0$, такие, что для любой $\varphi \in S(R^n)$ выполняется неравенство

$$\left|\left\langle f, \varphi \right\rangle\right| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in R^n} (1+|x|^2)^{p/2} \left|D^\alpha \varphi(x)\right|.$$

3. $D^\alpha : S'(R^n) \to S'(R^n)$ – линейный, непрерывный оператор.

<u>*Доказательство.*</u> Так как $D^\alpha : D' \to D'$ – линейный, непрерывный оператор, но нужно только показать, что для любой $f \in S'(R^n)$ будет $D^\alpha f \in: S'(R^n)$, что очевидно, так как

$$\left\langle D^\alpha f, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, D^\alpha \varphi \right\rangle$$

для любой $\varphi \in S(R^n)$.

Преобразование Фурье функций из $S'(R^n)$

Определение 21.11. Функционал $F(f)$, определяемый равенством $\left\langle F(f), \varphi \right\rangle = \left\langle f, F(\varphi) \right\rangle$ для всех $\varphi \in S(R^n)$, называется преобразованием Фурье функций $f \in S'(R^n)$.

Свойства преобразования Фурье.

1. Для любой $f \in S'(R^n)$ будет $F(f) \in S'(R^n)$, следовательно, F непрерывна в S'.

<u>*Доказательство.*</u> В силу линейности преобразования F получаем, что $F(f)$ – линейный функционал на $S(R^n)$. Далее, если $f_m \underset{m\to\infty}{\to} f$ в $S'(R^n)$, то так как для любой $\varphi \in S(R^n)$ выполняется $F(\varphi) \in S(R^n)$, получаем:

$$\left\langle F(f_m), \varphi \right\rangle = \left\langle f_m, F(\varphi) \right\rangle \to \left\langle f, F(\varphi) \right\rangle = \left\langle F(f), \varphi \right\rangle,$$

т.е. $F(f_m) \to F(f)$. Наконец, если $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\to} \varphi$ в $S(R^n)$, то $\hat{\varphi}_m \underset{m\to\infty}{\to} \hat{\varphi}$, в $S'(R^n)$, и тогда справедливо:

$$\left\langle F(f), \varphi_m \right\rangle = \left\langle f, \hat{\varphi}_m \right\rangle \to \left\langle f, \hat{\varphi} \right\rangle = \left\langle F(f), \varphi \right\rangle, \text{ т.е. } F(f) \in S'(R^n).$$

2. Обратное преобразование Фурье определяется равенством

$$F^{-1}[f]=F[f(-x)], \text{ где } \left\langle f(-x),\varphi\right\rangle=\left\langle f,\varphi(-x)\right\rangle.$$

<u>*Доказательство*</u>. Для любой $\varphi\in S(R^n)$ выполнено

$$F(\varphi(-x))=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{R^n}\varphi(-x)e^{-i(x,\xi)}dx=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{R^n}\varphi(t)e^{i(t,\xi)}dt=\left(F^{-1}\varphi\right)(\xi).$$

Отсюда

$$\left\langle F^{-1}[F(f)],\varphi\right\rangle=\left\langle F\left(F(f)(-\xi)\right),\varphi\right\rangle=\left\langle F(f)(-\xi),F(\varphi)\right\rangle=$$

$$=\left\langle F(f),F(\varphi)(-\xi)\right\rangle=\left\langle F(f),F^{-1}\varphi\right\rangle=\left\langle f,\varphi\right\rangle,$$

т.е. $F(F(f))(-\xi)=f$. Аналогично, $F(F(f(-x)))=f$.

<u>***Следствие***</u>. Оператор F осуществляет гомеоморфизм (взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение) пространства $S'(R^n)$ на себя, а также $S(R^n)$ на себя.

3. Преобразование Фурье и дифференцирование связаны равенствами:

а) $D^\alpha F(f)=F[(-ix)^\alpha f]$,

б) $F(D^\alpha f)=(-i\xi)^\alpha F(f)$.

<u>*Упражнение 21.3.*</u> Доказать эти равенства.

4. Преобразование Фурье сдвигов и преобразований подобия задаются равенствами:

а) $F[f(x-x_0]=e^{i(x_0,\xi)}F(f)$;

б) $(Ff)(\xi+\xi_0)=F[e^{-i(x_0,x)}f](\xi)$;

в) $F[f(Cx)](\xi)=\dfrac{1}{|C|^n}F[f]\left(\dfrac{\xi}{C}\right), 0\neq C\in R.$

<u>*Упражнение 21.4.*</u> Доказать эти равенства.

<u>***Примеры.***</u>

<u>***21.6.***</u> Вычислим преобразование Фурье дельта-функции.

Имеем: $\left\langle F\delta,\varphi\right\rangle=\left\langle\delta,F\varphi\right\rangle=\hat\varphi(0)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n}\varphi(x)dx.$

Следовательно, $F(\delta)=(2\pi)^{-n/2}$.

<u>***21.7.***</u> $F[\delta(x-x_0]=e^{i(x_0,\xi)}F[\delta(x)]=(2\pi)^{-n/2}e^{i(x_0,\xi)}$.

_21.8._ $F[1]=F^{-1}[1(-x)]=F^{-1}[1]=(2\pi)^{n/2}\delta(x).$

_21.9._ Пусть $\theta(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\ge 0;\\ 0 \text{ при } x<0.\end{cases}$

Тогда

$$\left\langle F[\theta],\varphi\right\rangle=\left\langle \theta,F\varphi\right\rangle=\lim_{\alpha\to 0+0}\frac{1}{|C|^n}\left\langle e^{-\alpha x},F\varphi\right\rangle=\lim_{\alpha\to 0+0}\left\langle F[e^{-\alpha x}\theta],\varphi\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha+i\xi)x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{\alpha+i\xi}e^{-(\alpha+i\xi)x}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha+i\xi}=$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\xi-i\alpha}.$$

Переходя к пределу при $\alpha\to 0+0$ в S' (или в D') по формуле Сохоцкого, получаем $F[\theta](\xi)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\xi+i0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\pi\delta(\xi)-iP\frac{1}{\xi}\right].$

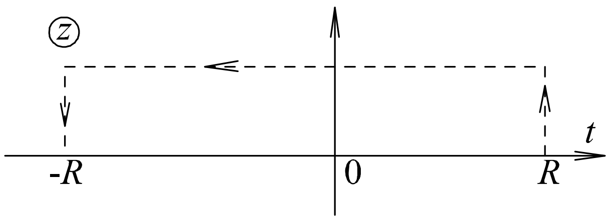
_21.10._ Пусть $f(x)=e^{-\alpha^2|x|^2}$, $\alpha>0$. Тогда $f\in S(R^n)$ и

$$F[f](\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2|x|^2-i(\xi,x)}dx=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2x_j{}^2-i\xi_jx_j}dx_j=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2-i\xi_jt/2}dt=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}e^{-\xi_j^2/(4\alpha^2)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t+i\xi_j/(2\alpha))}dt=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\alpha\right)^n}e^{-|\xi|^2/(4\alpha^2)}\prod_{j=1}^{n}\int_{\operatorname{Im}z=\xi_j/(2\alpha)}e^{-z^2}dz=\frac{1}{(2\pi\alpha)^{n/2}}e^{-|\xi|^2/(4\alpha^2)}\left(\int_{\operatorname{Im}z=0}e^{-z^2}dz\right)^n=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\alpha\right)^n}e^{-|\xi|^2/(4\alpha^2)} \text{ (см. рисунок).}$$



Положив $\alpha = a\sqrt{t}, a > 0,$ получим

$$F\left[e^{-a^2t|x|^2}\right](\xi) = \frac{1}{\left(\sqrt{2t}a\right)^n} e^{-|\xi|^2/(4\alpha a^2 t)}.$$

21.5. Преобразование Фурье и свертка обобщенных функций

Определение 21.12. Пусть $g \in S'(R^n)$ и компакт $K \subset R^n$ таковы, что для любой функции $\varphi \in S(R^n)$ из условия $\text{supp}\,\varphi \cap K = \varnothing$ следует, что $\langle g, \varphi \rangle$=0. Тогда обобщенная функция $g \in S'(R^n)$ называется финитной, а пересечение всех таких компактов – ее носителем.

Определение 21.13. Пусть f, $g \in S'(R^n)$ и g – финитная обобщенная функция, а $\eta \in D$ и равна единице в окрестности носителя g. Положим $\langle f{*}g, \varphi \rangle = \langle f(x)g(x), \eta(y)\phi(x+y) \rangle$ для всех $\varphi \in S(R^n)$. Тогда функционал $f * g$ называется сверткой обобщенной функции $f \in S'(R^n)$ и финитной обобщенной функции g.

Здесь $\langle f(x)g(x), \psi(x,y) \rangle$=$\langle f(x), \langle g(y), \psi(x,y) \rangle \rangle$ для любой $\psi \in S(R^n \times R^n)$ называется прямым произведением обобщенных функций f и g.

Свойства свертки.

1. Свертка $f * g \in S'(R^n)$ и линейна по каждому аргументу.

2. Для любого мультииндекса α выполняется

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g = D^\alpha g * f.$$

3. $f * \delta = \delta * f) = f$ для любой $f \in S'(R^n)$.

Доказательство.

$$\langle f(x)\delta(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle = \langle f(x), \langle \delta(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \rangle =$$

$$= \langle f(x), \varphi(x) \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

так как $\eta(y) \equiv 1$ в окрестности точки $y = 0$.

4. Как следствие 2 и 3 получаем $D^\alpha f = D^\alpha \delta * f = \delta * D^\alpha f.$

5. Справедливо равенство $F[f * g] = (2\pi)^{n/2} F[f]F[g].$

Доказательство проведем для случая $g = \delta.$ Имеем:

$$\left\langle F[f*\delta],\varphi\right\rangle = \left\langle f*\delta, F[\varphi]\right\rangle = \left\langle f(x),\left\langle \delta(y),\eta(y)F[\varphi](x+y)\right\rangle\right\rangle =$$

$$=\left\langle f, F[\varphi]\right\rangle = \left\langle F[f]\frac{1}{(2\pi)^{n/2}},\varphi\right\rangle (2\pi)^{n/2} = (2\pi)^{n/2}\left\langle F[f]F[\delta],\varphi\right\rangle$$

для любого $\varphi \in S(R^n)$, таким образом, $F[f*\delta] = F[f]F[\delta].$

21.6. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами

Определение 21.14. Обобщенная функция $u \in D'$ называется обобщенным решением дифференциального уравнения, если

$$L(D)u = \left\langle \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u,\varphi\right\rangle = \left\langle f,\varphi\right\rangle.$$

Определение 21.15. Обобщенная функция $E \in D'$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора $L(D)$, если $L(D)E(x) = \delta(x).$

Замечание 21.3. Для многих задач фундаментальные решения $E \in S'(R^n).$ И для их вычисления удобен аппарат преобразования Фурье.

Лемма 21.2. $E \in D'$ является фундаментальным решением оператора $L(D)$: $L(-i\xi)F[E\} = (2\pi)^{-n/2}$, где $F[E]$ – преобразование Фурье от E, и $L(-i\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha (-i\xi)^\alpha.$

Доказательство.

$$F[L(D)E] = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha F[D^\alpha E] = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{a_\alpha}{(-i\xi)^\alpha} F[E] = F[\delta] = (2\pi)^{-n/2},$$

т.е. справедливо равенство $L(-i\xi)F[E] = (2\pi)^{-n/2}.$

Обратно, если выполнено равенство леммы, то выполняется обратное преобразование Фурье и получим, что $E(x)$ удовлетворяет уравнению $L(E) = \delta$.

<u>Лемма 21.3.</u> Если $z(t)$ – решение задачи

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0, z(0) = 1,$$

то $E(t) = \theta(t)z(t)$ – фундаментальное решение оператора $\dfrac{d}{dt} + a(t)$.

<u>*Доказательство.*</u> $E'(t) = \theta(t)z'(t) + z(t)\delta(t) = \theta(t)z'(t) + \delta(t)$. Отсюда следует $E' + a(t)E = \theta(t)[z'(t) + a(t)z] + \delta(t) = \delta(t)$.

<u>Пример 21.6</u> (фундаментальное решение уравнения теплопроводности). Если $E(x,t) \in S'(R^{n+1})$ таковы, что

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \Delta E = \delta(x,t), \quad a > 0,$$

то, выполняя преобразование Фурье по x, получим

$$F_x\left[\frac{\partial E}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}F_x[E] = \frac{\partial}{\partial t}F_x[E] = \frac{\partial}{\partial t}\hat{E}(\xi,t),$$

$$F_x\left[\Delta E\right] = -|\xi|_2 \frac{\partial}{\partial t}\hat{E}(\xi,t),$$

$$F_x\left[\delta(x,t)\right] = F_x[\delta(x)\delta(t)] = (2\pi)^{-n/2}1(\xi)\delta(t).$$

Следовательно, $\hat{E}(\xi,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \hat{E}(\xi,t)}{\partial t} + a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi,t) = (2\pi)^{-n/2}1(\xi)\delta(t).$$

Используя лемму 21.3, получим $\hat{E}(\xi,t) = (2\pi)^{-n/2}\theta(t)e^{-a^2|\xi|^2 t}$. Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$E(x,t) = F_\xi^{-1}[\hat{E}(\xi,t)] = F_\xi[\hat{E}(-\xi,t)] = F_\xi[\hat{E}(\xi,t)] = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-|x|^2/(4a^2 t)}.$$

<u>Пример 21.12.</u> Пусть $n = 3$. Вычислим с помощью преобразования Фурье фундаментальные решения оператора Лапласа $E_3(x)$. Если $\Delta E_3(x) = \delta(x)$, то $-|\xi|^2 F[E_3](\xi) = (2\pi)^{-3/2}$, и получаем соотношение $F[E_3](\xi) = -(2\pi)^{-3/2}|\xi|^{-2}$. Это локально интегрируемая в

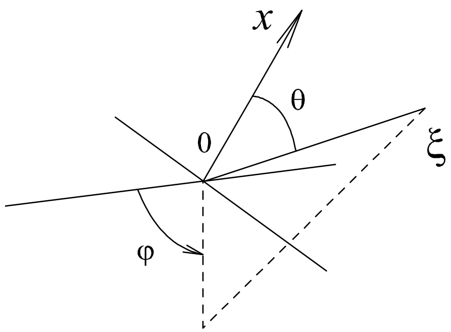
R^3 функция. Тогда имеем $E_3(x) = -(2\pi)^{-3/2} F^{-1}[|\xi|^{-2}]$. Подсчитываем выражение справа, т.е. для любой функции $\varphi \in S(R^3)$ будет выполнено:

$$\left\langle F^{-1}[|\xi|^{-2}], \varphi \right\rangle = \left\langle |\xi|^{-2}\ F^{-1}[\varphi] \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{|R^3} \frac{d\xi}{|\xi|^2} \int\limits_{R^3} e^{i(\xi,x)} \varphi(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|\xi|<|R^3} \frac{d\xi}{|\xi|^2} \int\limits_{R^3} e^{i(\xi,x)} \varphi(x) dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|R^3} \varphi(x) dx \int\limits_{|\xi|<R^3} \frac{e^{i(\xi,x)}}{|\xi|^2} d\xi.$$

Во внутреннем интеграле перейдем к сферическим координатам, направив полярную ось по вектору $\vec{x}$. Тогда $(\xi, x) = |x|\rho\cos\theta$, где $\xi_1 = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $\xi_2 = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $\xi_2 = \rho\cos\theta$. Якобиан такого преобразования $I = \rho^2 \sin\theta$.



Имеем

$$\int\limits_{|\xi|<R} \frac{e^{i(\xi,x)}}{|\xi|^2} d\xi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{R} e^{i|x|\rho\cos\theta} d\rho =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi} d(-\cos\theta) \int\limits_0^{R} e^{i|x|\rho\cos\theta} d\rho = (-\cos\theta = t) = 2\pi \int\limits_0^{R} d\rho \int\limits_{-1}^{1} e^{-i|x|\rho t} dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{R} d\rho) \int\limits_{-1}^{1} (\cos|x|\rho te - i\sin|x|\rho t) dt = 4\pi \int\limits_0^{R} \frac{\sin|x|\rho}{|x|\rho} d\rho =$$

$$= 4\pi\int\limits_0^R \frac{\sin|x|\rho}{|x|\rho}d\rho) = \frac{4\pi}{|x|}\int\limits_0^R \frac{\sin t}{t}dt.$$

Отсюда следует равенство

$$E_3(x) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3|x|}\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{R|x|}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{1}{4\pi|x|},$$

так как $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$

Лемма 21.4. Пусть $f \in D'$ такова, что $E * f$ существует в D'. Тогда решение уравнения $L(D)u(x) = f(x)$ существует и задается формулой $u = E * f$.

Доказательство. Имеем $L(D)(E * f) = (L(D)E) * f = \delta * f = f$.

V. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 22. Обобщенная задача Дирихле для уравнений эллиптического типа

В качестве примера приложения полученных результатов рассмотрим доказательство существования обобщенных решений задачи Дирихле для оператора

$$(Lu)(x) = -\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u(x)) + q(x)u(x), \tag{22.1}$$

где $p(x) \in C^1(\overline{G}),\ p(x) > 0$ в G; $q(x) \in C(\overline{G}),\ \mathrm{q}(x) > 0$ в $\overline{G}$.

Область G предполагаем ограниченной. Рассмотрим билинейную форму Дирихле

$$B(u,v) = \int_G \left(p(x)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} + q(x)\bar{v}(x) \right) dx. \tag{22.2}$$

Эта форма определена для всех $u, v \in W_2^1(G)$, а для $u \in C^2(\overline{G})$ и $v \in C_0^\infty(G)$ очевидно, что $(Lu, v)_{L_2(G)} = B(u,v)$. Положим

$$\text{к} = \min_{x\in\overline{G}} p(x) > 0, C_0 = \max_{x\in\overline{G}} \left(\max(p(x), q(x)) \right).$$

Тогда для любых $u, v \in W_2^1(G)$ будет выполнено

$$\left. \begin{aligned} &\text{а) } B(u,u) \ge \kappa \|u\|^2_{W_2^1(G)}; \\ &\text{б) } B(u,v) \le C_0 \|u\|_{W_2^1(G)} \|v\|_{W_2^1(G)}\ . \end{aligned} \right\} \tag{22.3}$$

Рассматривается следующая задача. Для заданной функции $f \in W_2^{-1}(G)$ найти $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G)$, такую, что

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle \text{ для любой } v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G). \tag{22.4}$$

<u>Замечание 22.1.</u> Сформулированная задача называется обобщенной (однородной) задачей Дирихле для оператора (22.1).

Если $f \in C(\overline{G})\quad W_2^{-1}(G)$, а $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ – классическое решение задачи Дирихле для оператора L, т.е.

$$(Lu)(x) = f(x), u\big|_{\partial G} = 0, \tag{22.5}$$

то можно показать, что $u \in W_p^1(G)$ (другими словами, функция u имеет суммируемые в квадрате на G первые производные) и u является решением задачи (22.4). Решение задачи (22.4) называют обобщенным из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ решением задачи (22.5).

Теорема 22.1. Задача (22.4) имеет и притом единственное решение.

Доказательство. В силу неравенства Фридрихса

$$\exists C \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) : \| u \|_{L_2(G)}^2 \le C \| u \|_{W_2^1(G)}^2 ,$$

откуда

$$\kappa \| u \|_{W_2^1(G)}^2 \ge \frac{\kappa}{2} \| u \|_{W_2^1(G)}^2 + \frac{\kappa}{2C} \| u \|_{L_2(G)}^2 \ge \kappa_0 \| u \|_{W_2^1(G)}^2 ,$$

где $\kappa_0 = \min\left(\frac{\kappa}{2}, \frac{\kappa}{2C} \right)$. Но тогда из (22.3) получаем, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ будет выполнено

а) $B(u,u) \ge \kappa \| u \|_{W_2^1(G)}^2$;

б) $| B(u,v) | \le C_0 \| u \|_{W_2^1(G)} \| v \|_{W_2^1(G)}$.

По теореме Лакса–Мильграма существует однозначно определенный изоморфизм A пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ на $W_2^{-1}(G)$, такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ будет выполнено $B(u,v) = \langle Au, v \rangle$, следовательно, для любой $f \in W_2^{-1}(G)$ существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, а именно $u = A^{-1} f$, такая, что $B(u,v) = \langle f, v \rangle$ для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. Таким образом, $u = A^{-1} f$ и есть решение задачи (22.4).

Замечание 22.2. Обобщенная неоднородная задача Дирихле для оператора (22.1) ставится следующим образом: для заданных $f \in W_2^{-1}(G)$ и $g \in W_2^1(G)$ требуется найти $u \in W_2^1(G)$, такую, что

$$\begin{cases} B(u,v)=\langle f,v\rangle, \ \forall v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \ ; \\ (u-g)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \ . \end{cases}$$

Заменой $w=u-g$ эта задача сводится к рассмотренной ранее однородной задаче.

Замечание 22.3. Если $f\in C(\overline{G})$ и граница ∂G области G является достаточно гладким $(n-1)$-мерным многообразием, то можно показать, что обобщенное решение задачи (22.5) будет классическим решением этой задачи.

§ 23. Задача Коши для уравнения теплопроводности

В $D'\left(R^{n+1}_{(x,t)}\right)$ ищем решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f.$$

Согласно примеру 21.11 функция $E(x,t)=\dfrac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-|x|^2/(4a^2t)}$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Определение 23.1. Пусть функция u обращается в нуль при $t<0$. Тогда обобщенная функция $V=E*f$ называется тепловым потенциалом с плотностью f.

Теорема 23.1. Пусть $f(x,t)\in C(t\ge 0)$ обращается в нуль при $t\le 0$ и ограничена в любой полосе $0\le t\le T$. Тогда тепловой потенциал $V=E*f$ выражается формулой

$$V(x,t)=\int_0^t\int_{R^n}\frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau,$$

является непрерывной в $R^{n+1}_{t\geq 0}$ функцией, удовлетворяющей оценке:

$$|V(x,t)|\leq t \sup_{\begin{cases}0\leq\tau\leq t\\ \xi\in R^n\end{cases}} |f(\xi,\tau)|, t>0,$$

начальному условию $\forall x\in R^n \exists \lim\limits_{t\to 0+0} V(x,t)=0$ и уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial V}{\partial t}=a^2\Delta V+f$ в D'.

Доказательство. Имеем

$$(E*f)(x,t)=\int_0^{+\infty}\int_{R^n} f(\xi,\tau)E(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau = V(x,t).$$

Используя теоремы о непрерывности по параметру, получаем, что $V(x,t)$ непрерывна при $t>0$. Далее

$$|V(x,t)|\leq t \sup_{\begin{cases}0\leq\tau\leq t\\ \xi\in R^n\end{cases}} |f(\xi,\tau)| \int_0^t d\tau \int_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi =$$

$$= t \sup_{\begin{cases}0\leq\tau\leq t\\ \xi\in R^n\end{cases}} |f(\xi,\tau)|, t>0.$$

Отсюда $\exists \lim\limits_{t\to 0+0} V(x,t)=0$. Наконец, из леммы 21.4 следует, что $V(x,t)$ удовлетворяет в D' уравнению теплопроводности.

Определение 23.2. Пусть $u_0(x)$ – ограниченная в R^n функция. Тогда обобщенная функция $V_0(x,t)=E(x,t)*u_0(x)\delta(t)$ называется поверхностным тепловым потенциалом.

Теорема 23.2. Пусть $u_0(x)\in C(R^n)$ и ограничена в R^n. Тогда поверхностный тепловой потенциал $V_0(x,t)$ представляется интегралом Пуассона

$$V_0(x,t)=\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{R^n} u_0(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}d\xi,$$

принадлежит классу $C^\infty(t>0)$, удовлетворяет неравенству

$$|V_0(x,t)|\le \sup_{x\in R^n}|u_0(x)|$$

для всех $(x,\ t)$, $t>0$, непрерывен при $t\ge 0$, удовлетворяет начальному условию $V_0(x,0)=u_0(x)$ и однородному уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial V_0}{\partial t}=a^2\Delta V_0$.

<u>*Доказательство*</u>. Для любой $\varphi\in D(R^{n+1})$ выполняется

$$\left\langle E*u_0(x)\delta(t),\varphi\right\rangle=\left\langle E(x,t)u_0(\xi)\delta(\tau),\eta(\xi,\tau)\varphi(x+\xi,t+\tau)\right\rangle=$$
$$=\left\langle E(x,t)u_0(\xi),\varphi(x+\xi,t)\right\rangle=\left\langle E*u(x),\varphi\right\rangle,$$

где последняя свертка берется по x. Отсюда следует, что

$$V_0(x,t)=(E*u_0)(x,t)=\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{R^n}u_0(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi.$$

При любом $t>0$ имеем $V_0(x,t)\in C^\infty$ и, очевидно, удовлетворяет оценке $|V_0(x,t)|\le\sup_{\xi\in R^n}|u_0(\xi)|$. Дифференцируя, получаем, что $\dfrac{\partial V_0}{\partial t}=a^2\Delta V_0$. Наконец, фиксируя $x_0\in R^n$, получаем:

$$\left|V_0(x,t)-u_0(x_0)\right|=\left|\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{R^n}\left(u_0(\xi)-u_0(x)\right)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi\right|\le$$
$$\le\int_{R^n}\left|u_0(\xi)-u_0(x_0)\right|E(x-\xi,t)d\xi=\int_{R^n}\left|u_0(x-y)-u_0(x_0)\right|E(y,t)dy=$$
$$=\int_{|y|\le\delta}\left|u_0(x-y)-u_0(x_0)\right|E(y,t)dy+\int_{|y|>\delta}\left|u_0(x-y)-u_0(x_0)\right|E(y,t)dy\le$$
$$\le\varepsilon+\frac{2M}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{|y|>\delta}e^{-\frac{|y|^2}{4a^2t}}dy,$$

где $M=\sup_{x\in R^n}|u_0(x)|$, а оценка следует из непрерывности $u(x)$ в точке x_0. В самом деле, в силу непрерывности $u(x)$ в точке x_0 получаем, что

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0\forall x,y\in R^n,|x-x_0|<\delta,|y|<\delta:|u_0(x+y)-u_0(x_0)|<\varepsilon.$$

Далее, пользуемся тем, что

$$\int\limits_{|y|>\delta} E(y,t)dy\le 1,\ \int\limits_{|y|>\delta} e^{-\frac{|y|^2}{4a^2t}}dt\frac{2M}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}=\int\limits_{|z|>\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz\frac{2M}{(\pi)^{n/2}}\to 0\ ,$$

при $t\to 0+0$, следовательно, существует $\lim\limits_{\substack{t\to 0+0\\ x\to x_0}} V(x,t)=u_0(x_0).$

Замечание. Если при $f\in C(t\ge 0), f\equiv 0$ при $t<0,$ ограничена в каждой полосе $0\le t\le T$, а $u_0\in C(R^n)$ и ограничена, то обобщенное решение задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,t),u(x,0)=u_0(x)$ задается формулой Пуассона

$$u(x,t)=V(x,t)+V_0(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{R^n}\frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau+$$

$$+\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int\limits_{R^n}u_0(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Можно показать, что если к тому же $f\in C^2(R^n),$ то

$$u\in C^2(x>0)\cap C(t\ge 0),$$

т.е. является классическим решением задачи Коши для уравнения теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бремерман Г.Б. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
2. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975.
5. Лебег А. Об измерении величин. М.: Учпедгиз, 1960.
6. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1981.
7. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
9. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
10. Шилов Г.Е., Гуревич Б.А. Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1967.
11. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
12. Шубин М.А. Лекции по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 10.12.2009. Формат 60х84 1/16.
Уч.-изд.л. 10,5. Печ. л. 10,5. Тираж 300 экз.
Изд. № 1/1/67. Заказ № 14

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42